

Beziehungen zwischen der Geometrie der Unterstufe und der Analytischen Geometrie der Oberstufe

Artur Bergmann

Düsseldorf

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	26
2	Affine Inzidenzebenen	32
3	Parallelverschiebungen (in (d)-Ebenen)	37
4	Streckungen in (D)-Ebenen	50
5	T als Vektorraum über dem Schiefkörper K der spur-treuen Endomorphismen von T; die A zugeordnete affine Ebene bezüglich ${}_K T$ (im Sinne der Linearen Algebra)	60
6	Bezüge zu Vorgehensweisen im Unterricht	71
7	Anhang	78
	Literatur	82

1 Einleitung

In der Analytischen Geometrie der Oberstufe wird Geometrie mit den Mitteln der Linearen Algebra (Vektorrechnung, Lineare Gleichungssysteme,...) behandelt. Die geometrischen Objekte werden mit diesen Mitteln definiert.

Der Sache nach, nicht methodisch, behandelt man in der Unter- und Mittelstufe Geometrie auf der Grundlage von Axiomensystemen, die mehr oder weniger angesprochen werden. Die Axiome regeln den Umgang mit den Grundbegriffen (z.B. Punkte und Geraden).

In diesem Überblicksvortrag sollen Zusammenhänge zwischen diesen beiden Arten Geometrie zu betreiben besprochen werden, und zwar soll die Frage untersucht werden, wie aus der Sicht der Unterstufengeometrie die Analytische Geometrie fundiert werden kann. Aus geometrischen Gegebenheiten (die später präzisiert werden) sollen algebraische Strukturen hergeleitet werden, die es gestatten, geometrische Probleme mit algebraischen Mitteln zu behandeln (wie es in der analytischen Geometrie geschieht). Genauer soll auf der Grundlage der geometrischen Gegebenheiten ein Vektorraum über einem Schiefkörper hergeleitet werden, mit dessen Hilfe die ursprünglich gegebene Ebene wie in der Analytischen Geometrie beschrieben werden kann.

Diese Erörterungen sind *nicht* als möglicher Schulstoff gedacht. Sie sollen Einblick in den mathematischen Hintergrund der Schulgeometrie geben, um diese fachliche Grundlage besser verstehen zu können, so z.B. auch die Vorgehensweise in den meisten österreichischen Schulbüchern, in denen Vektoren (wenn sie zur Behandlung der Geometrie verwendet werden sollen) auf der Grundlage gegebener Koordinatensysteme eingeführt werden.

Aus Platzgründen kann ich leider nicht auf die vielfältigen Methoden eingehen, die für diesen Fragenkreis entwickelt wurden, oder historische Entwicklungen aufzeigen. Stellvertretend für die neuere Entwicklung (also nach der Zeit der griechischen Mathematik) erwähne ich nur das Buch von Hilbert [3], in dessen erster Auflage er seine Untersuchungen um 1900 in Buchform zusammenfaßte. Er hatte zur Koordinateneinführung die sogenannte Streckenrechnung entwickelt. Darauf will ich hier nicht weiter eingehen, sondern in etwas modifizierter Weise den Weg verfolgen, den W. Schwan in

seiner Arbeit [6] 1919 angegeben hat. Darin stellt Schwan die entscheidend neue Idee vor, zur Koordinateneinführung von vornherein direkt Abbildungsgruppen zu verwenden. Dies wurde wohl jahrzehntelang vergessen und erst allgemein durch das Buch [1] von E. Artin (1957) bekannt (wobei mir unklar ist, ob Artin die Schwansche Arbeit kannte oder nicht, da er sie nicht erwähnt). Sachlich sind in der Arbeit von Schwan im Prinzip (dort z.T. projektiv betrachtet) alle wesentlichen Ideen und Ergebnisse enthalten, die zu diesem Komplex im Artinschen Buch (in affiner Form und etwas modifiziert) stehen.

Nun sollen in kurz zusammengefaßter Form die wichtigsten Grundideen, die Vorgehensweise und wesentliche Ergebnisse geschildert werden, damit die späteren Einzelausführungen besser eingeordnet werden können. In der Darstellung folgen wir ungefähr dem Artinschen Vorgehen, wobei wir aber die betrachteten Abbildungen (Parallelverschiebungen und Streckungen) abweichend vom üblichen Vorgehen in der Literatur hier konstruktiv einführen und ihre Eigenschaften auf dieser Basis herleiten.

Wie weiter unten angedeutet wird, brauchen wir zur Herleitung algebraischer Strukturen aus den geometrischen Gegebenheiten nicht alle Eigenschaften der euklidischen Ebene (die im Unterricht der Unterstufe behandelt wird). Es genügt, nur einen Teil der geometrischen Struktur der euklidischen Ebene als Grundlage für unsere Betrachtungen zu verwenden. Man benötigt keine metrischen Eigenschaften oder solche, die die Orthogonalität betreffen. Neben der grundlegenden Beziehung zwischen Punkten und Geraden (eindeutige Existenz der Verbindungsgerade zweier Punkte) und den Eigenschaften der Parallelität wird nur noch die Gültigkeit des (affinen) Satzes von Desargues herangezogen. Ebenen mit einer solchen geometrischen Struktur ((affine) Desargues-Ebenen oder kurz (D)-Ebenen) werden in Kapitel 2 als Grundlage für alle weiteren Untersuchungen eingeführt. Die euklidische Ebene ist ein Beispiel für solche Ebenen (da der Satz von Desargues dort gilt), so daß man sich diese immer als Modell vorstellen kann. Es sei kurz angemerkt, daß wir kein Koordinatensystem als gegeben voraussetzen. Koordinatensysteme werden sich dann später automatisch aus den hergeleiteten algebraischen Strukturen ergeben.

In Desarguesschen Ebenen definieren wir in Kapitel 3 zuerst konstruktiv Parallelverschiebungen und zeigen dann, daß diese (mit der

Hintereinanderausführung als Komposition) eine abelsche Gruppe \mathbf{T} bilden. Die so definierten Parallelverschiebungen bilden jede Gerade auf eine dazu parallele Gerade ab und haben, wenn sie nicht die identische Abbildung sind, keinen Fixpunkt. Sie sind also Translationen (die meist in der Literatur über Grundlagen der Geometrie abstrakt durch diese Eigenschaften definiert werden). Da in Desarguesschen Ebenen die Menge der konstruktiv definierten Parallelverschiebungen mit der Menge der Translationen übereinstimmt, wird in Zukunft meist von Translationen gesprochen.

In analoger Weise werden in Kapitel 4 Streckungen konstruktiv definiert, und es wird gezeigt, daß die Menge \mathcal{S}_Z der Streckungen mit Zentrum Z eine (nicht notwendig abelsche) Gruppe bildet. Für alle Punkte P und Q sind die Gruppen \mathcal{S}_P und \mathcal{S}_Q isomorph.

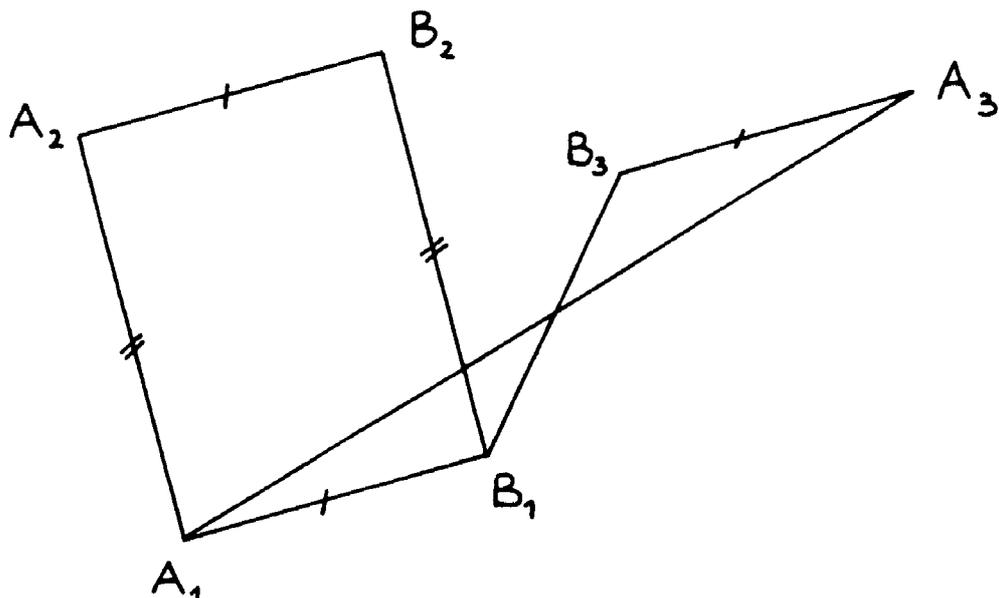
Ist σ eine Streckung, τ eine Translation, so ist die mit σ gebildete Konjugation $\iota_\sigma(\tau) := \sigma\tau\sigma^{-1}$ wieder eine Translation, die dieselbe Menge von Spuren (die mit den Fixgeraden übereinstimmen (vgl. Kapitel 4)) besitzt wie τ . Solche Endomorphismen heißen spurtreu. Daher operieren die Streckungen durch Konjugation als spurtreue Endomorphismen ι_σ auf der abelschen Gruppe \mathbf{T} der Translationen. Anschaulich kann man sagen, daß $\iota_\sigma(\tau) = \sigma\tau\sigma^{-1}$ die aus τ durch die Wirkung von σ (als Konjugation) entstehende „gestreckte“ Translation ist. Die spurtreuen Endomorphismen bilden einen Unterring des Endomorphismenringes von \mathbf{T} (vgl. Kapitel 5). Nun kann man zeigen, daß es zu jedem spurtreuen Endomorphismus φ von \mathbf{T} , der ungleich dem Nullendomorphismus ist, eine Streckung σ (bei vorgegebenen Z sogar eine eindeutig bestimmte Streckung σ aus \mathcal{S}_Z) gibt, so daß φ mit der Konjugation mit σ übereinstimmt: $\varphi = \iota_\sigma$. Da die Konjugation $\iota_{\sigma^{-1}}$ mit σ^{-1} das Inverse von ι_σ ist, sind alle spurtreuen Endomorphismen φ von \mathbf{T} , die ungleich dem Nullendomorphismus sind, invertierbar (also Automorphismen von \mathbf{T}). Der Ring der spurtreuen Endomorphismen K von \mathbf{T} ist also ein Schiefkörper, der mengenmäßig übereinstimmt mit der Vereinigung der Menge $\iota(\mathcal{S}_Z)$ der Konjugationen mit Elementen aus \mathcal{S}_Z (für jeden Punkt Z) mit dem Nullendomorphismus. Dieser Schiefkörper K operiert (als Unterkörper des Endomorphismenringes) auf der abelschen Gruppe \mathbf{T} so, daß \mathbf{T} über K ein Vektorraum (der Dimension 2) ist.

Die Vektoren sind nach dieser Herleitung die Translationen der (Desarguesschen) Ebene, von der wir ausgingen. Die Elemente des

Schiefkörper sind (abgesehen vom Nullendomorphismus) die Konjugationen mit Streckungen (auf \mathbf{T}). Geht man z.B. von einer euklidischen Ebene aus, so wird der so hergeleitete Körper der spurtreuen Endomorphismen isomorph zum Körper \mathcal{R} der reellen Zahlen.

Nach dem geschildertem Vorgehen operiert die dem Vektorraum zugrundeliegende abelsche Gruppe \mathbf{T} (der Translationen) in natürlicher Weise (als Gruppe von Abbildungen) auf den Punkten der Ebene \mathbf{A} , von der wir ausgingen: Ein Punkt P wird durch $\tau \in \mathbf{T}$ auf $\tau(P)$ abgebildet. Aus den Eigenschaften von \mathbf{T} folgt weiter, daß die Menge $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ der Punkte von \mathbf{A} , zusammen mit der eben angegebenen Operation des Vektorraums \mathbf{T} (über K) auf $\mathcal{P}(\mathbf{A})$ eine affine Ebene im Sinne der Analytischen Geometrie wird, wobei die Geraden der so gewonnenen „algebraischen“ affinen Ebene genau der ursprünglichen Ebene entsprechen. Daher kann man nun (wie eingangs erwähnt) geometrische Probleme in der Ebene \mathbf{A} mit den Mitteln der Analytischen Geometrie bearbeiten. Führt man jetzt z.B. in üblicher Weise ein Koordinatensystem mit dem Ursprung 0 ein, so sind die von Null verschiedenen Koordinaten aus dem obigen Schiefkörper K als Elemente ι_σ (Konjugation mit σ aus \mathcal{S}_0) anzusehen.

Zur Hinführung auf die konstruktive Einführung der Parallelverschiebungen und der geometrischen Grundlagen hierfür (die für euklidische Ebenen in [2] so geschieht wie hier für Desarguessche Ebenen) erinnern wir an folgende Tatsachen: In der euklidischen Ebene kann man Parallelverschiebungen als Abbildungen einführen, die Punkte in derselben Richtung um denselben Betrag „verschieben“. Für zwei Punktepaare (A_1, B_1) und (A_2, B_2) als Paare von Urbild bzw. Bildpunkt bei Abbildungen kann man auch ohne (Vollkreis-) Winkelmesser und Maßstab feststellen, ob sie zu ein- und derselben Parallelverschiebung gehören: Wegen der Verschiebung in derselben Richtung müssen die Verbindungsgeraden $g(A_1, B_1)$ und $g(A_2, B_2)$ notwendig parallel sein. Weiter muß die Verbindungsgerade $g(B_1, B_2)$ der Bildpunkte parallel zur Verbindungsgerade $g(A_1, A_2)$ der Urbildpunkte sein, da A_1 in B_1 in derselben Richtung um denselben Betrag wie A_2 in B_2 verschoben werden soll (vgl. Figur 1).



Figur 1

Gilt umgekehrt:

$g(A_1, B_1)$ parallel zu $g(A_2, B_2)$ und $g(A_1, A_2)$ parallel zu $g(B_1, B_2)$, so sind die Paare (A_1, B_1) und (A_2, B_2) Paare von (Urbild, Bildpunkt) einer Parallelverschiebung.

Diese Vorüberlegung wird noch deutlicher, wenn ein weiteres Paar (A_3, B_3) herangezogen wird mit den Eigenschaften:

- (1) Der Abstand von A_3 und B_3 stimmt mit dem Abstand von A_1 und B_1 überein.
- (2) Der orientierte Winkel der Halbgeraden von A_1 aus, auf der B_1 liegt, ist entgegengesetzt zu dem der Halbgeraden von A_3 aus, auf der B_3 liegt (so daß also die Verbindungsgeraden $g(A_1, B_1)$ und $g(A_3, B_3)$ parallel sind).

Dann sind die Verbindungsgeraden $g(A_1, A_3)$ und $g(B_1, B_3)$ nicht parallel.

Aus diesen Betrachtungen folgt daher: Zur Behandlung von Parallelverschiebungen ist es auch in der euklidischen Ebene nicht unbedingt erforderlich, Begriffe wie orientierter Winkel oder Abstand zu verwenden. Es genügt, daß man gut mit Parallelogrammeigenschaften umgehen kann und gute Möglichkeiten hat, Beziehungen

zwischen Punktepaaren untersuchen zu können. Die geeigneten geometrischen Voraussetzungen dazu, d.h. die Forderungen an die Ebenen, in denen wir dann Parallelverschiebungen (und später Streckungen) konstruktiv einführen wollen, stellen wir im folgenden Kapitel zusammen.

2 Affine Inzidenzebenen

In diesem Kapitel beschreiben wir, welche ebenen geometrischen Strukturen im folgenden als Grundlage aller Untersuchungen betrachtet werden sollen. Zu diesen kommt man, wenn man zuerst nur solche Teile der euklidischen Geometrie betrachtet, die Folgerungen aus den grundlegenden Beziehungen zwischen Punkten und Geraden (wie „ein Punkt liegt auf einer Geraden“) oder zwischen zwei Geraden (wie „eine Gerade schneidet eine andere“) oder aus der Parallelität zwischen Geraden beinhalten. Dazu stellt man dann noch Zusatzforderungen (z.B. die Gültigkeit des Satzes von Desargues). Sonst erhielte man eine so allgemeine Theorie, in der keine wirklich interessanten Resultate gälten. Außerdem sollen hier nur solche geometrischen Strukturen betrachtet werden, die als mathematischer Hintergrund für die Schulgeometrie relevant sind, in der man ja zuerst den Anschauungsraum modellieren will.

Für Resultate aus den Grundlagen der Geometrie, die im Verlauf der Erörterungen benutzt werden, verweisen wir auf die entsprechende Literatur (z.B. Lingenberg [4]).

Zu Beginn definieren wir affine Inzidenzebenen.

2.1 Definition. \mathcal{P} und \mathcal{G} seien nicht leere, disjunkte Mengen. Die Elemente von \mathcal{P} heißen Punkte, die von \mathcal{G} Geraden. $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ sei eine Relation zwischen \mathcal{P} und \mathcal{G} , die *Inzidenzrelation* genannt wird. Wir schreiben $P I g$ für $(P, g) \in I$ und sprechen dafür: P *inzidiert* mit g oder P liegt auf g oder g geht durch P .

Zwei Geraden g und h heißen *parallel* (in Zeichen $g \parallel h$), wenn entweder g mit h übereinstimmt oder wenn es keinen Punkt gibt, der mit beiden inzidiert. Für g nicht parallel zu h wird $g \not\parallel h$ geschrieben. Punkte P, Q, R heißen *kollinear*, wenn es eine Gerade g gibt, so daß P, Q und R mit g inzidieren: $P, Q, R I g$.

Ein Tripel $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ heißt eine *affine Inzidenzebene*, wenn folgende Axiome (A1), (A2) und (A3) gelten.

(A1) Für alle Punkte P und Q mit $P \neq Q$ gibt es genau eine Gerade g , auf der P und Q liegen.

(A2) Für alle Geraden g und alle Punkte P gibt es genau eine Gerade h , so daß P mit h inzidiert und h parallel zu g ist.

Parallelenaxiom

(A3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte.

Die Gerade g nach (A1) heißt *Verbindungsgerade* von P und Q und wird in Zukunft mit $g(P, Q)$ bezeichnet. Wird später eine Gerade $g(A, B)$ benannt, so wird immer vorausgesetzt, daß $A \neq B$ ist und die Verbindungsgerade gemäß (A1) für die Punkte A, B ($A \neq B$) gemeint ist.

Das Axiom (A3) sichert, daß man Geometrie betreibt, deren Punkte nicht alle auf einer Geraden liegen.

Das Parallelenaxiom (A2) wird im Unterricht der Unter- und Mittelstufe fortlaufend benutzt. Führt man z.B. propädeutisch Koordinatensysteme ein, so wird es zur Festlegung der Koordinaten eines Punktes verwendet.

Beispiele für affine Inzidenzebenen sind die *euklidischen Ebene* und *affine Ebenen* im Sinne der Analytischen Geometrie (bezüglich zweidimensionalen Vektorräumen über beliebigen Körpern).

2.2 Aus der Theorie der affinen Inzidenzebenen werden in Zukunft u.a. folgende Definitionen und Sätze verwendet:

- (i) Sind Geraden g und h nicht parallel, so gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt S , der mit beiden inzidiert. S heißt Schnittpunkt von g und h .
- (ii) Die Parallelität ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse von g , $\Pi_g := \{h \in \mathcal{G} \mid h \parallel g\}$, heißt *Parallelenbüschel* (bestimmt durch g).
- (iii) **Definition.** $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ und $\mathbf{A}' = (\mathcal{P}', \mathcal{G}', I')$ seien affine Inzidenzebenen. Eine bijektive Abbildung $\kappa : \mathcal{P} \cup \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}' \cup \mathcal{G}'$ heißt *Kollineation*, wenn gilt:
 - (1) $\kappa(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}'$;
 - (2) $\kappa(\mathcal{G}) \subset \mathcal{G}'$;
 - (3) Für alle Punkte P aus \mathcal{P} und alle Geraden g aus \mathcal{G} gilt:
$$P I g \iff \kappa(P) I' \kappa(g).$$
- (iv) Die Menge $\text{Koll}(\mathbf{A})$ der Kollineationen einer affinen Inzidenzebene \mathbf{A} in sich ist mit der Hintereinanderausführung als Komposition eine Gruppe.

(v) $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ und $\mathbf{A}' = (\mathcal{P}', \mathcal{G}', I')$ seien affine Inzidenzebenen, $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ eine bijektive Abbildung. Dann ist ψ genau dann die Punktabbildung einer Kollineation, wenn ψ die Eigenschaft (k) besitzt:

(k) Sind $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{P}$ kollinear, so sind $\psi X_1, \psi X_2, \psi X_3$ kollinear.

(vi) Kollineationen κ respektieren die Parallelität von Geraden:
Aus $g \parallel h$ folgt $\kappa g \parallel \kappa h$.

Wie einleitend schon bemerkt, werden wir zu den Axiomen (A1) bis (A3) noch ein weiteres Axiom hinzunehmen. Zur Vorbereitung erinnern wir an den Satz von Desargues (in affiner Form).

2.3 (i) Großer (affiner) Satz (D) von Desargues

Gegeben seien zwei nicht-ausgeartete Dreiecke 123 und $1'2'3'$, so daß die entsprechenden Ecken jeweils auf einer von drei verschiedenen Geraden durch einen Punkt Z liegen. Keiner der Dreieckspunkte sei Z . Zwei Paare entsprechender Seiten seien parallel. Dann ist auch das dritte Paar der Seiten parallel.

Anders geschrieben (vgl. Figur 2):

Voraussetzungen

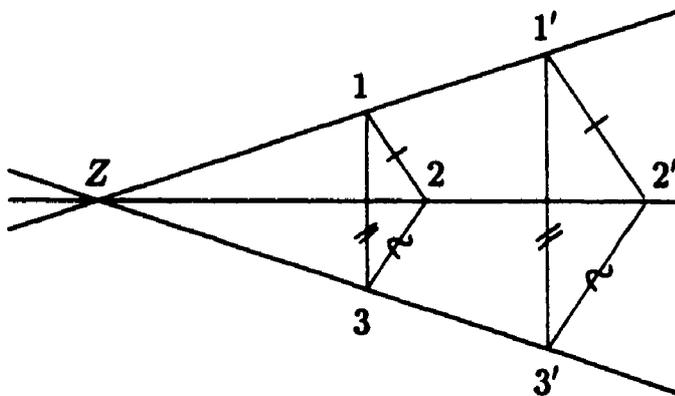
(1) $Z \in g(i, i')$ $i = 1, 2, 3, i' = 1', 2', 3'$.

(2) $Z \neq i, i'$ $i = 1, 2, 3, i' = 1', 2', 3'$.

(3) (a) $g(1, 2) \parallel g(1', 2')$

(b) $g(1, 3) \parallel g(1', 3')$.

Dann gilt $g(2, 3) \parallel g(2', 3')$



Figur 2

Bemerkungen

- (1) Der intuitive Hintergrund des Desarguesschen Satzes ist folgender: Man denke sich die Konfiguration, die durch die Voraussetzungen von (D) gegeben ist, als Bild einer dreiseitigen Pyramide, die von zwei parallelen Ebenen geschnitten wird. Dann muß auch das dritte Paar von Schnittgeraden parallel sein. Diese anschauliche Betrachtung hat folgenden mathematischen Hintergrund: Die Gültigkeit des Satzes (D) von Desargues ist notwendig und hinreichend dafür, daß eine affine Inzidenzebene in einen affinen Inzidenzraum eingebettet werden kann (also als Ebene in einem solchen Raum aufgefaßt werden kann). Da in der Schulgeometrie zuerst die Modellierung des Anschauungsraumes im Vordergrund steht, ist es daher ganz natürlich, als Zusatzforderung zu den Axiomen (A1) bis (A3) noch die Gültigkeit von (D) zu verlangen, wenn man geometrische Strukturen betrachten will, die für die Geometrie in der Schule relevant sind.
- (2) In der euklidischen Geometrie kann man (D) z.B. mit Hilfe des Strahlensatzes und seiner Umkehrung beweisen.

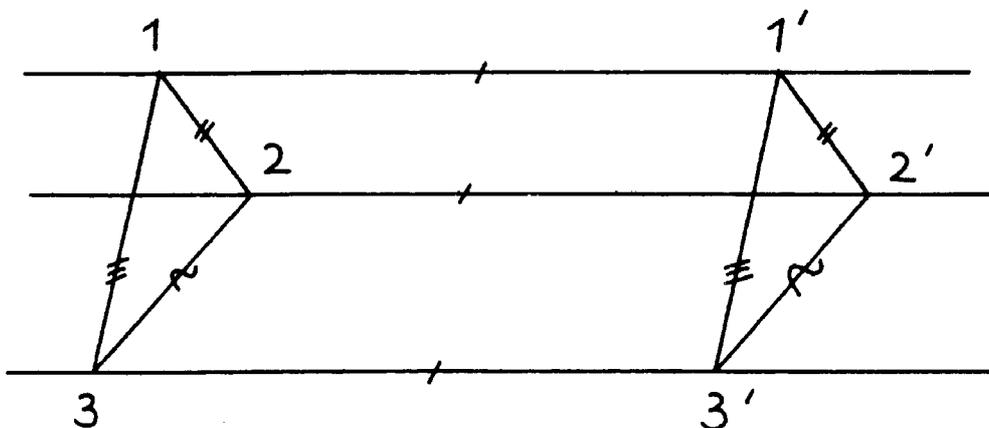
2.3 (ii) Kleiner Satz (d) von Desargues

Die Voraussetzungen sind analog zu denen von (D) mit dem einzigen Unterschied, daß jetzt die „Trägergeraden“ $g(i, i')$ ($i = 1, 2, 3$) parallel sind, d.h. es sei:

$$g(1, 1') \parallel g(2, 2') \parallel g(3, 3') \text{ und} \\ g(1, 2) \parallel g(1', 2') \text{ sowie } g(1, 3) \parallel g(1', 3').$$

Dann gilt

$$g(2, 3) \parallel g(2', 3').$$



Figur 3

Ohne Beweis erwähnen wir

2.4 Satz. Aus (D) folgt (d).

2.5 Definition. Eine affine Inzidenzebene $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ heißt eine Desarguessche oder eine (D)- [bzw. (d)-] Ebene, wenn (D) [bzw. (d)] in \mathbf{A} gilt.

In Zukunft werden wir immer (D)-Ebenen betrachten, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

3 Parallelverschiebungen (in (d)-Ebenen)

Wie am Ende des vorigen Kapitels gesagt, wird in Zukunft immer vorausgesetzt, daß eine (D)-Ebene vorliegt, so daß nach 2.4 auch (d) gilt.

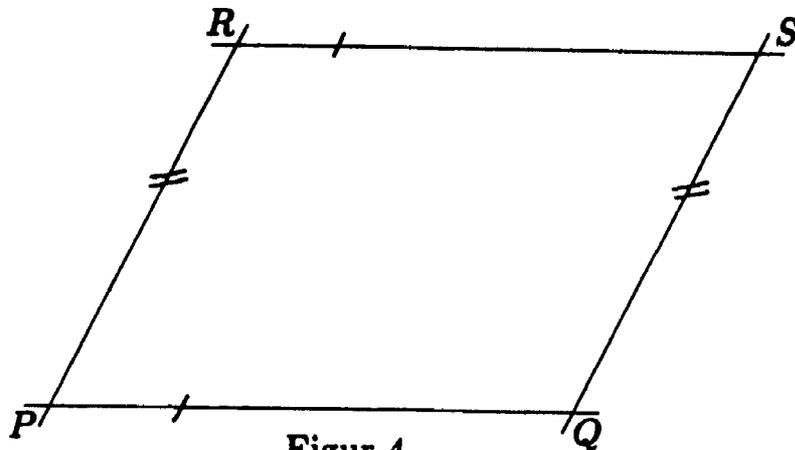
In diesem dritten Kapitel führen wir Parallelverschiebungen konstruktiv ein und untersuchen auf dieser Basis ihre Eigenschaften. Im Rahmen eines Überblickartikels können, wenn überhaupt, nur Andeutungen zu den Beweisen gemacht werden (bei denen u.a. systematisch (d) und damit zusammenhängende Sätze anzuwenden sind). Wie in der Überschrift angedeutet, braucht man zur hiesigen Definition und dem Nachweis der Eigenschaften nur die Gültigkeit von (d) vorauszusetzen. Eine Zusammenfassung der für unsere Zwecke wichtigsten Resultate dieses Kapitels findet man in 3.10.

Die Definition der Parallelverschiebungen geschieht, wie in der Einleitung angedeutet, aufgrund von Parallelogrammeigenschaften. In [2] findet man eine solche Einführung für euklidische Ebenen (mit anderen Beweisen). Ostermann und Schmidt haben in [5] in analoger Weise Vektoren eingeführt, indem sie axiomatisch Parallelogrammeigenschaften an den Anfang stellen. Diese axiomatisch geforderten Parallelogrammeigenschaften ergeben sich bei unserem Vorgehen als Sätze in (D)- (bzw. in (d)-) Ebenen.

3.1 Definition. $A = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ sei eine (d)-Ebene, $P, Q, R, S \in \mathcal{P}$.

(a) Das geordnete Quadrupel (P, Q, R, S) heißt ein *eigentliches Parallelogramm*, falls $P \neq Q$; P, Q, R, S nicht kollinear sind und

$g(P, Q) \parallel g(R, S)$ sowie $g(P, R) \parallel g(Q, S)$ gelten (Figur 4).

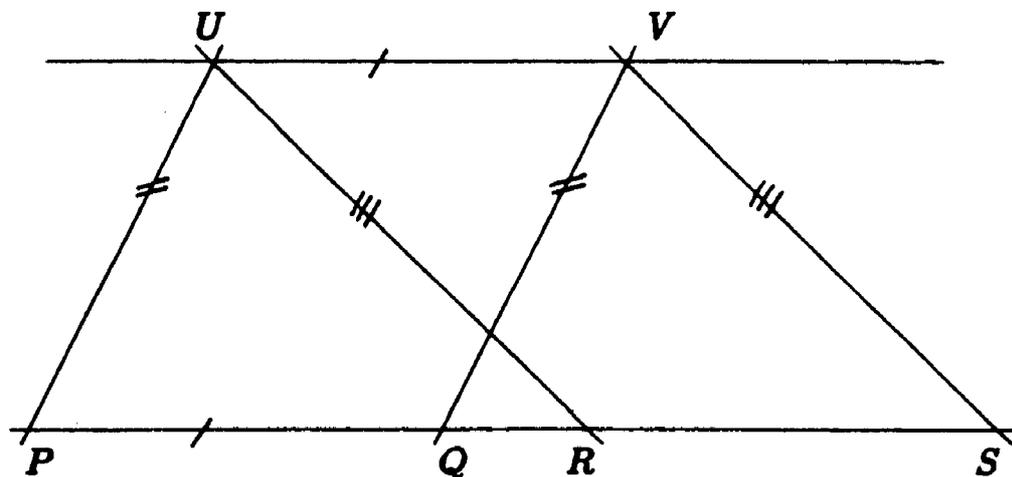


Figur 4

(P, Q, R, S) heißt ein *uneigentliches Parallelogramm*, wenn entweder 3.1 b) oder 3.1 c) gilt:

3.1 b) $P \neq Q$; P, Q, R, S kollinear, und es gibt ein Paar (U, V) von Punkten, so daß gilt:

(P, Q, U, V) und (R, S, U, V) sind eigentliche Parallelogramme.



Figur 5

3.1 c) $P = Q$ und $R = S$.

Bemerkungen

- (1) Nach 3.1 c) ist also (P, P, R, R) ein Parallelogramm
- (2) Die Definition eines uneigentlichen Parallelogramms in 3.1 b) ist abhängig von dem Paar (U, V) der Hilfspunkte. Der Hilfssatz 3.2 zeigt jedoch die Unabhängigkeit hiervon.

3.2 Hilfssatz Die Definition 3.1b) eines uneigentlichen Parallelogramms ist unabhängig von dem Paar der „Hilfspunkte“ (U, V) in folgendem Sinn:

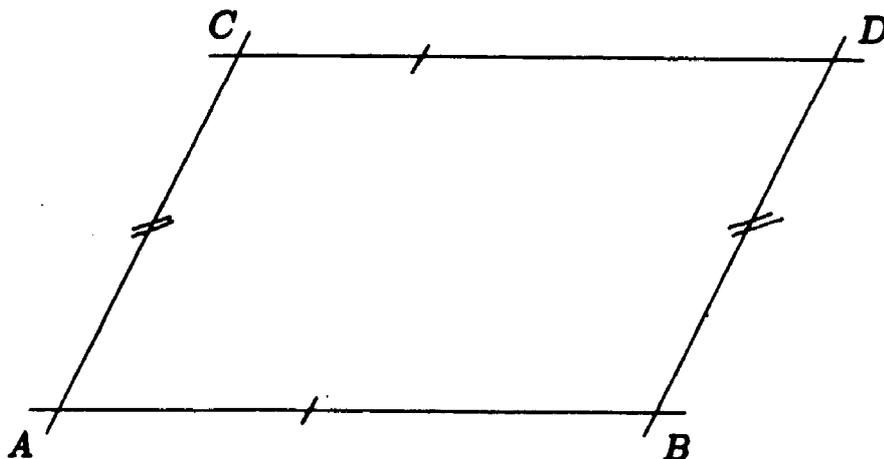
(P, Q, U, V) und (R, S, U, V) seien eigentliche Parallelogramme;
 (P, Q, U', V') sei ein eigentliches Parallelogramm. Dann ist auch (R, S, U', V') ein eigentliches Parallelogramm.

D.h., zur Prüfung, ob ein uneigentliches Parallelogramm im Sinne von 3.1b) vorliegt, verwende man ein beliebiges Paar (U, V) von Punkten, so daß (P, Q, U, V) ein eigentliches Parallelogramm ist. Ist dann (R, S, U, V) ein eigentliches Parallelogramm, so ist (P, Q, R, S) ein uneigentliches Parallelogramm, sonst nicht.

3.3 Hilfssatz. (P, Q, R, S) sei ein Parallelogramm. Dann sind auch (a) (R, S, P, Q) ; (b) (Q, P, S, R) ; (c) (P, R, Q, S) Parallelogramme.

3.4 Definition. A, B, C, D seien Punkte. Die geordneten Paare (A, B) und (C, D) von Punkten heißen *parallelgleich*, wenn (A, B, C, D) ein Parallelogramm ist.

Für nicht-kollineare parallelgleiche Paare (A, B) und (C, D) liegt also folgende Konfiguration vor (Figur 6):



Figur 6

Es gilt

3.5 Satz. Die Parallelgleichheit ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$.

Die Grundlage für die Definition von Parallelverschiebungen ist folgender Satz.

3.6 Satz. (P, Q) sei ein Punktepaar. Für jeden Punkt X gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt Y , so daß (P, Q) und (X, Y) parallelgleich sind (d.h. (P, Q, X, Y) ein Parallelogramm ist).

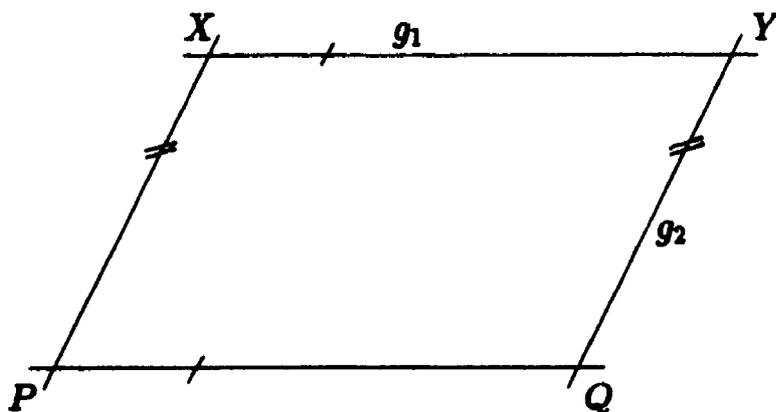
Beweis: 1. Für $P \neq Q$ und P, Q, X nicht kollinear (Figur 7).

g_1 sei die Parallele zu $g(P, Q)$ durch X ; g_2 sei die Parallele zu $g(P, X)$ durch Q ; Y der Schnittpunkt von g_1 und g_2 (dessen Existenz man nachweisen muß).

Dann ist (P, Q, X, Y) ein eigentliches Parallelogramm, also ist (P, Q) parallelgleich zu (X, Y) . Weiter gilt:

Y ist der eindeutig bestimmte Punkt mit dieser Eigenschaft.

Y ist also der eindeutig bestimmte Punkt, der das Tripel (P, Q, X) zu einem (eigentlichen) Parallelogramm (P, Q, X, Y) ergänzt.



Figur 7

2. Für $P \neq Q$ und P, Q, X kollinear wähle man (U, V) so, daß (P, Q, U, V) ein eigentliches Parallelogramm ist. Dann konstruiert man Y wie oben so, daß (U, V, X, Y) ein eigentliches Parallelogramm wird. Man zeigt dann, daß Y der (eindeutig bestimmte) Punkt mit der gewünschten Eigenschaft ist.

Auch hier ist also Y der eindeutig bestimmte Punkt, der das (kollineare) Tripel (P, Q, X) zu einem (uneigentlichen) Parallelogramm ergänzt. \square

Satz 3.6 besagt im Zusammenwirken mit 3.5:

Zu jedem Punkt X gibt es genau einen Punkt Y , so daß (X, Y) in der Äquivalenzklasse von (P, Q) bezüglich der Parallelgleichheit ist. Ordnen wir einem Punkt X diesen Punkt zu, so wird eine Abbildung festgelegt, was wir noch explizit formulieren.

3.7 Definition. Für jedes Punktepaar (P, Q) sei $\tau_{PQ} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ die folgende Abbildung:

Für alle Punkte X sei $\tau_{PQ} X =: Y$ der nach Satz 3.6 eindeutig bestimmte Punkt, so daß (P, Q) und (X, Y) parallelgleich sind.

τ_{PQ} heißt *Parallelverschiebung* (bestimmt durch (P, Q)). Die Menge aller so definierten *Parallelverschiebungen* wird mit \mathbf{T} bezeichnet.

3.8 Die Konstruktionsvorschrift für den Bildpunkt $\tau_{PQ} X$ von X folgt aus dem Beweis von 3.6: Man ergänze (P, Q, X) durch $\tau_{PQ} X$ zu einem Parallelogramm $(P, Q, X, \tau_{PQ} X)$.

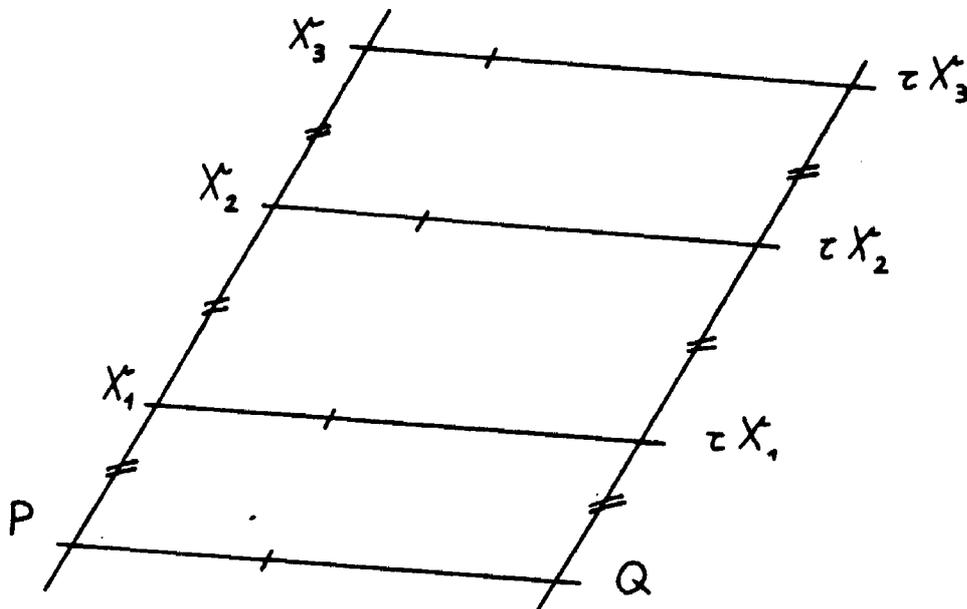
Die Bezeichnung τ_{PQ} mit dem Index PQ (als geordnetes Paar zu lesen!) deutet darauf hin, daß zur Konstruktion des Bildpunktes immer vom Paar (P, Q) ausgegangen wird. Aus der Konstruktionsvorschrift folgt sofort, daß der Bildpunkt $\tau_{PQ} X$ von X stets auf der Parallelen zu $g(P, Q)$ durch X liegt.

3.9 Im folgenden stellen wir *wichtige Eigenschaften der Parallelverschiebungen* zusammen.

- (0) **Vorbemerkung:** Da die Parallelgleichheit nach 3.5 eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ist, ist $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ die elementfremde Vereinigung der Äquivalenzklassen. Diese sind nach 3.6 der Graph einer Funktion, die in 3.7 explizit definiert und Parallelverschiebung genannt wurde. Also ist $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ die elementfremde Vereinigung der Funktionsgraphen von Parallelverschiebungen. Daraus ergeben sich direkt verschiedene der im folgenden angegebenen Eigenschaften von Parallelverschiebungen.
- (1) Der Graph von τ_{PQ} ist die Äquivalenzklasse von (P, Q) bezüglich der Parallelgleichheit.
- (2) τ_{PQ} ist durch die Wirkung auf einen Punkt bestimmt. Denn ein Paar (A, B) aus der Äquivalenzklasse von (P, Q) legt diese fest.
- (3) Es ist $\tau_{PQ} = \tau_{RS}$ genau dann, wenn (P, Q) und (R, S) parallelgleich sind. D.h., für alle Punktepaare (R, S) aus der Äquivalenzklasse von (P, Q) ist durch τ_{RS} dieselbe Abbildung wie τ_{PQ} definiert (und nur durch diese). Das ist eine Folge von (0).
- (4) τ_{PQ} ist bijektiv mit $\tau_{PQ}^{-1} = \tau_{QP}$. Das folgt aus der Konstruktionsvorschrift, wenn man $\tau_{QP} \tau_{PQ}$ bzw. $\tau_{PQ} \tau_{QP}$ betrachtet.
- (5) $\tau_{PQ}(P) = Q$.
- (6) $\tau_{PP} = \text{id}$ (identische Abbildung auf \mathcal{P}).
- (7) $\tau \in \mathbf{T}$, $\tau \neq \text{id}$. Dann hat τ keinen Fixpunkt.
- (8) Eine Parallelverschiebung τ erhält die Kollinearität: Sind X_1, X_2, X_3 kollinear, so auch $\tau X_1, \tau X_2, \tau X_3$.

Beweisskizze: Die X_i seien paarweise verschieden (da sonst nichts zu beweisen ist). Zum Nachweis von (8) wähle man für τ eine Darstellung $\tau = \tau_{PQ}$ mit P auf der Geraden

$g = g(X_1, X_2)$ (vgl. (0)). Nach der Konstruktionsvorschrift 3.8 liegen die τX_i alle auf der Parallelen zu $g = g(P, X_i)$ durch Q , also auf $g(\tau X_1, \tau X_2)$.



Figur 8

□

Bisher sind Parallelverschiebungen als Punktabbildungen definiert. Unter Verwendung von 2.2(v) erhält man aus (8):

- (9) Eine Translation τ induziert eine *Kollineation* mit der Eigenschaft $\tau(g(A, B)) = g(\tau A, \tau B)$.

In *Zukunft* wird eine *Parallelverschiebung* τ immer als *Kollineation* angesehen und wieder mit τ bezeichnet. Wir halten noch einmal explizit fest:

- (10) Bei einer Parallelverschiebung τ wird jede Gerade g auf eine dazu parallele Gerade abgebildet: $\tau g \parallel g$.

Definition. Eine Gerade g heißt *Spur* einer Parallelverschiebung, wenn ein Punkt P auf g existiert, so daß τP wieder auf g liegt. Aus der Konstruktionsvorschrift 3.8 erhält man:

- (11) Ist $\tau = \tau_{PQ} \neq \text{id}$ eine Parallelverschiebung, so ist die Gesamtheit der Spuren das Parallelenbüschel $\Pi_{g(P,Q)}$.
Außerdem gilt: Eine Gerade g ist *Fixgerade* von τ genau dann, wenn g eine *Spur* ist.

Definition. Die Menge $\Pi_{g(P,Q)}$ der Spuren von $\tau = \tau_{PQ} \neq \text{id}$ heißt die *Richtung* von τ . Für $\tau = \text{id}$ werden *alle Parallelenbüschel* als *Richtungen* angesehen.

Definition. g sei eine Gerade.

$\mathbf{T}_g := \{\tau \in \mathbf{T} \mid \Pi_g \text{ ist Richtung für } \tau\}$.

Man beachte, daß in der Teilmenge \mathbf{T}_g von \mathbf{T} neben id alle Parallelverschiebungen τ (und nur diese) auftreten, die eine Darstellung $\tau = \tau_{UV}$ besitzen, so daß $g(U, V)$ parallel zu $g(P, Q)$ ist. \mathbf{T}_g ist die Menge der Parallelverschiebungen, die jede Gerade des Parallelenbüschels Π_g in sich abbildet. Ist $h \nparallel g$, so wird nach 2.2(vi) zwar das Parallelenbüschel Π_h bei τ in sich abgebildet, aber nicht die einzelnen Geraden in sich (Π_h wird *nicht geradenweise* in sich abgebildet).

Als nächste Eigenschaft erörtern wir den für unser Vorhaben ganz entscheidenden Satz.

(12) **Satz.** Die Menge der Parallelverschiebungen ist mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine *abelsche Gruppe*. Für die Verknüpfung gilt die sogenannte „Parallelogrammkonstruktion“ $\tau_{BC} \tau_{AB} = \tau_{AC}$.

Zum *Beweis* einige Andeutungen für folgenden Fall:

$\tau_1 \neq \text{id} \neq \tau_2$ seien Parallelverschiebungen mit verschiedenen Richtungen. Nach (3) und (1) (bzw. (0)) ist es möglich, für τ_1 eine Darstellung $\tau_1 = \tau_{AB}$ mit beliebigem „ersten“ Punkt A zu wählen. τ_2 kann analog als $\tau_2 = \tau_{BC}$ mit „erstem“ Punkt B dargestellt werden. A, B, C sind in unserem Fall nicht kollinear. X sei ein Punkt, der weder auf $g(A, B)$ noch auf $g(B, C)$ liege (vgl. Figur 9). Nach 3.8 gilt für $\tau_1 X = \tau_{AB} X$:

$$g(A, B) \parallel g(X, \tau_1 X) \text{ und } g(A, X) \parallel g(B, \tau_1 X).$$

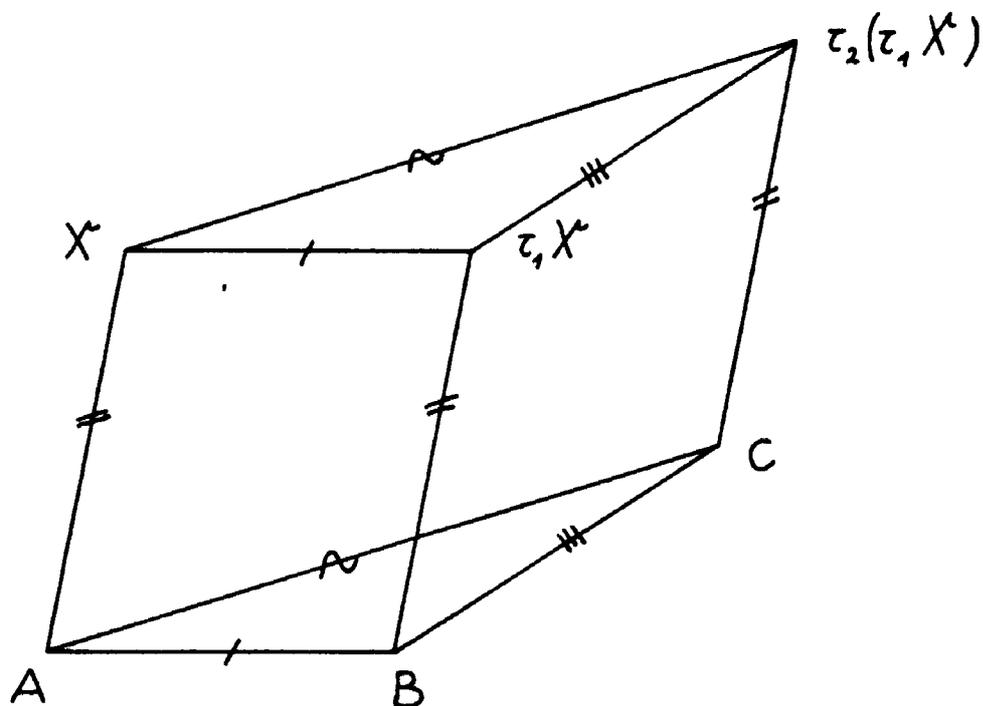
Entsprechend gilt für $\tau_2(\tau_1 X) = \tau_{BC} \tau_{AB} X$:

$$g(B, C) \parallel g(\tau_1 X, \tau_2 \tau_1 X) \text{ und } g(B, \tau_1 X) \parallel g(C, \tau_2 \tau_1 X).$$

Daher sind für die Dreiecke ABC und $X(\tau_1 X)(\tau_2 \tau_1 X)$ die Voraussetzungen von (d) erfüllt, so daß auch $g(A, C)$ und $g(X, \tau_2 \tau_1 X)$ parallel sind. Das bedeutet:

$$\tau_2 \tau_1 X = \tau_{BC} \tau_{AB} X = \tau_{AC} X.$$

Andere Lagen von X hat man entsprechend zu behandeln, Für Parallelverschiebungen mit gleicher Richtung vergleiche man auch die Bemerkungen zu (13).

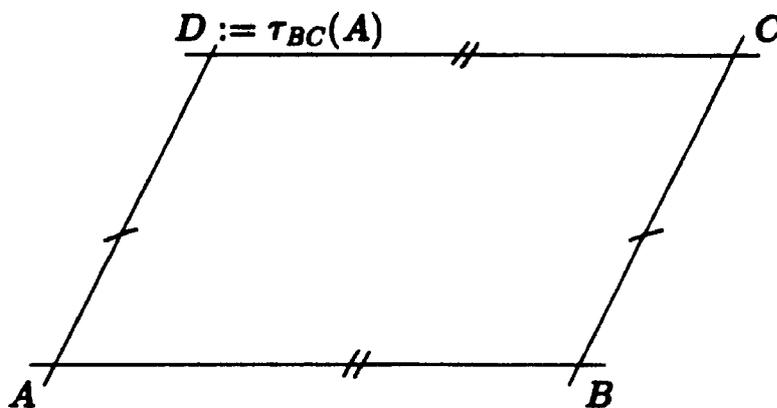


Figur 9

Daß die Verknüpfung kommutativ ist, überlegt man sich (im obigen Fall) anhand der folgenden Figur 10:

Man ergänze das Dreieck ABC durch $D := \tau_{BC} A$ zu einem Parallelogramm und zeige:

$\tau_{AB}(D) = \tau_{AB} \tau_{BC}(A) = C$. Da auch $\tau_{BC} \tau_{AB}(A) = C$ ist, folgt die Behauptung nach (2).



Figur 10

(13) T_g ist eine Untergruppe von T .

Wenn nämlich $\tau_1 \neq \text{id} \neq \tau_2$ dieselbe Richtung besitzen, so liegen A, B, C für die Darstellungen $\tau_1 = \tau_{AB}$ und $\tau_2 = \tau_{BC}$ auf einer Geraden, so daß $\Pi_{g(A,C)}$ mit $\Pi_{g(A,B)} = \Pi_{g(B,C)}$ übereinstimmt. Außerdem hat $\tau_{AB}^{-1} = \tau_{BA}$ dieselbe Richtung wie τ_{AB} .

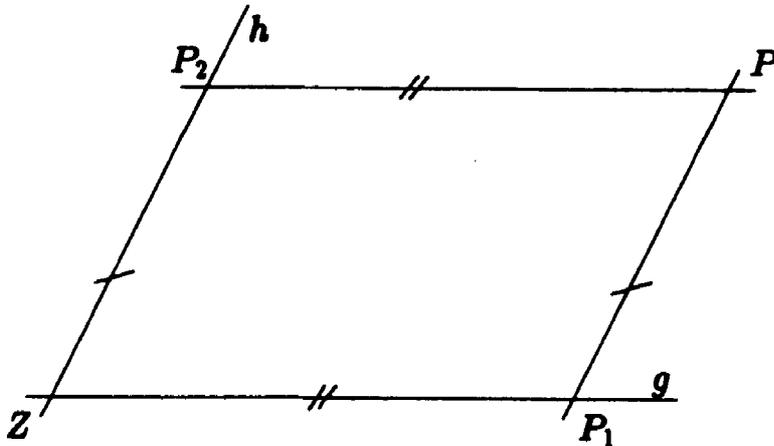
(14) Sind g und h nicht-parallele Geraden, so ist T die direkte Summe (das direkte Produkt) von T_g und T_h :

$$T = T_g T_h.$$

Es sei nämlich Z der Schnittpunkt von g und h (vgl. Figur 11). Wie schon für (12) entsprechend benutzt, kann jede Parallelverschiebung so dargestellt werden, daß Z der „erste“ Punkt ist. Ist also $\tau = \tau_{ZP}$, und ist P_1 der Schnittpunkt der Parallelen zu h durch P und g sowie P_2 der Schnittpunkt der Parallelen zu g durch P und h , so ist $\tau_{ZP} = \tau_{P_1P} \tau_{ZP_1} = \tau_{ZP_2} \tau_{ZP_1}$, also wegen der Kommutativität):

$$\tau_{ZP} = \tau_{ZP_1} \tau_{ZP_2} \quad \text{mit } \tau_{ZP_1} \in T_g \text{ und } \tau_{ZP_2} \in T_h.$$

Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß $T_g \cap T_h = \{\text{id}\}$ ist.



Figur 11

Durch (12), (13), (14) kennt man die Struktur der Gruppe T der Parallelverschiebungen gut. Im nächsten Punkt zeigen wir die engen Beziehungen zwischen der geometrischen Struktur der Ebene, von der wir ausgehen, und der algebraischen Struktur von T .

Aus der Vorbemerkung (0) ergibt sich:

(15) (a) Für jeden Punkt P_0 gilt:

$$\Phi_{P_0} : \mathcal{P} \rightarrow T$$

sei die durch $P \mapsto \tau_{P_0, P}$ definierte Abbildung. Dann ist Φ_{P_0} bijektiv mit der Umkehrabbildung $\tau \mapsto \tau(P_0)$.

Die Menge $\{\tau_{P_0, P}\}_{P \in \mathcal{P}}$ der Darstellungen mit festem „ersten“ Punkt P_0 stimmt also mit der Menge \mathbf{T} der Parallelverschiebungen überein, und zwar so, daß jedes $\tau \in \mathbf{T}$ genau einmal auftritt.

Wie in der Einleitung gesagt, werden die Elemente aus \mathbf{T} die Elemente der abelschen Gruppe, die dem Vektorraum zugrunde liegt, welchen wir der Ausgangsebene zuordnen werden. Die Darstellungen der Form $\tau_{P_0, P}$ mit festem ersten Punkt P_0 sind die *Ortsvektoren* (von P_0 aus), die in der analytischen Geometrie verwendet werden.

Die Aussage über die Umkehrabbildung kann man kurz als $\mathcal{P} = \mathbf{T}(P_0) := \{\tau(P_0) \mid \tau \in \mathbf{T}\}$ schreiben, wenn man zusätzlich vermerkt, daß dabei jeder Punkt genau einmal auftritt. Man kann also bei festgehaltenem Punkt P_0 alle Punkte eindeutig als $\tau(P_0)$ durch die entsprechende Parallelverschiebung τ charakterisieren.

Bezeichnet man mit $\mathcal{P}_g := \{P \in \mathcal{P} \mid P \mid g\}$ die Menge der Punkte auf g , so gilt

(b) Ist P_0 ein Punkt von g , so ist die auf \mathcal{P}_g eingeschränkte Abbildung $\Phi_{P_0}|_{\mathcal{P}_g} : \mathcal{P}_g \rightarrow \mathbf{T}_g$ bijektiv mit der Umkehrabbildung $\tau_{P_0, P}(P_0) = P$.

Es gilt also $\mathcal{P}_g = \mathbf{T}_g(P_0)$ mit obigen Zusatz (vgl. bei a)). Die Injektivität besagt: Aus $\tau_{P_0, P} = \tau_{P_0, R}$ folgt $P = R$.



Figur 12

(c) Die Aussage in (15) a) kann man auch so formulieren: Die Gruppe \mathbf{T} der Parallelverschiebungen operiert durch $(\tau, P) \mapsto \tau(P)$ scharf einfach transitiv auf der Punktmenge \mathcal{P} .

Dabei *definiert* man, daß eine Gruppe G auf einer Menge M vermöge $\varphi : G \times M \rightarrow M$ ($(g, m) \mapsto \varphi(g, m) =: gm$) *operiert*, wenn 1) und 2) gelten:

- 1) $em = m$ (für alle $m \in M$, e Einselement von G),
- 2) für alle $a, b \in G$ und alle $m \in M$: $(ab)m = a(bm)$.

G operiert *scharf einfach transitiv* auf M , wenn für alle Paare $(m, n) \in M \times M$ genau ein $g \in G$ existiert, so daß $gm = n$ ist.

Die Menge $G(m) := \{gm \mid g \in G\}$ heißt *Bahn* von m unter G .

Ein Teil von (15) b) ist in dieser Sprechweise die Aussage:
 \mathcal{P}_g ist die Bahn von P_0 | g unter \mathbf{T}_g .

Um für den Leser den Anschluß an die Behandlung in der Literatur über Grundlagen der Geometrie zu erleichtern, gehen wir kurz auf Dilatationen ein.

(16) (a) In einer affinen Inzidenzebene \mathbf{A} *definiert* man:

(i) Eine Kollineation δ heißt *Dilatation*, wenn für alle Geraden g gilt: δg ist parallel zu g .

Mit $\text{Dil}(\mathbf{A})$ sei die Menge aller Dilatationen bezeichnet.

(ii) Eine Dilatation δ heißt eine *Translation*, wenn δ entweder die identische Abbildung ist oder keinen Fixpunkt besitzt.

(b) Es gilt dann:

(i) $\text{Dil}(\mathbf{A})$ ist eine Untergruppe von $\text{Koll}(\mathbf{A})$.

(ii) \mathbf{T} ist eine Untergruppe von $\text{Dil}(\mathbf{A})$.

(iii) Es gibt genau zwei Typen von Dilatationen, die von der identischen Abbildung verschieden sind:

- 1) Translationen (also Dilatationen ohne Fixpunkt),
- 2) Dilatationen mit genau einem Fixpunkt.

(17) In (d)-Ebenen gilt nun:

Translationen sind Parallelverschiebungen und (vgl. (10) und (7)) Parallelverschiebungen sind Translationen. Die Gruppe \mathbf{T} der Parallelverschiebungen ist also auch die Gruppe der Translationen, die daher nach (15) c) auf der Punktmenge scharf einfach transitiv operiert.

Wir merken noch an, daß auch die Umkehrung gilt:

Operiert die Translationsgruppe auf der Punktmenge einer affinen Inzidenzebene \mathbf{A} scharf einfach transitiv, so ist \mathbf{A} eine (d)-Ebene.

Aufgrund dieser Ergebnisse unterscheiden wir in Zukunft nicht mehr zwischen *Parallelverschiebungen* und *Translationen* und sprechen meistens von Translationen.

Für die weiteren Erörterungen benötigen wir noch folgende Ergebnisse:

- (18) (a) Für jede Kollineation κ und jede Translation τ mit Richtung Π_g gilt:

$\kappa\tau\kappa^{-1}$ ist eine Translation mit Richtung $\Pi_{\kappa g}$.

Das kann etwas anders so geschrieben werden:

$$\kappa\tau_{PQ}\kappa^{-1} = \tau_{(\kappa P)(\kappa Q)}.$$

- (b) Also gilt: \mathbf{T} ist ein Normalteiler in $\text{Koll}(\mathbf{A})$ bzw. in $\text{Dil}(\mathbf{A})$.

Für eine Dilatation δ gilt nach Definition $\delta g \parallel g$, also $\Pi_{\delta g} = \Pi_g$. Daher erhält man speziell:

- (19) Für jede Dilatation δ und für jede Translation τ mit Richtung Π_g ist $\delta\tau\delta^{-1}$ eine Translation mit Richtung Π_g . Anders ausgedrückt: $\delta\mathbf{T}_g\delta^{-1} \subset \mathbf{T}_g$, d.h. \mathbf{T}_g ist ein Normalteiler in $\text{Dil}(\mathbf{A})$.

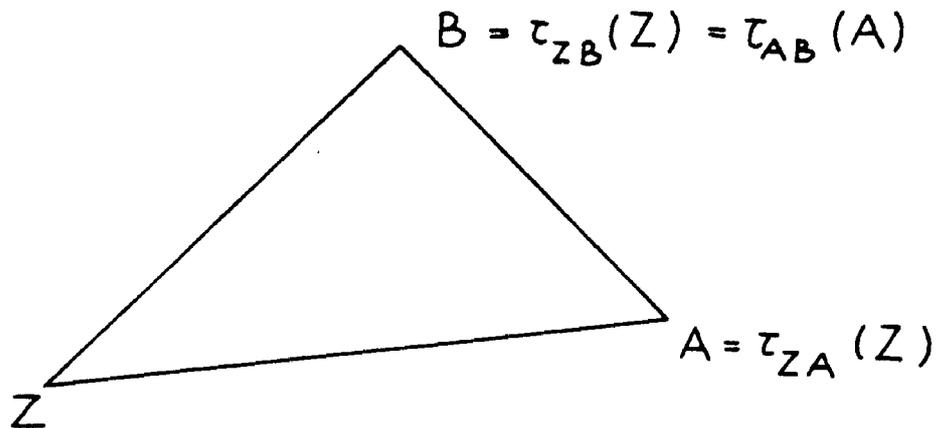
3.10 Wir fassen kurz zusammen, welche wesentlichen Ergebnisse wir auf dem Weg zur Algebraisierung Desarguesscher Ebenen bereits erzielt haben.

In einer (D)-Ebene $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ (es genügt bereits (d)) ist die Menge \mathbf{T} der Parallelverschiebungen, die mit den Translationen übereinstimmen (3.9 (17)), eine *abelsche Gruppe* (3.9 (12)).

\mathbf{T} operiert scharf einfach transitiv auf der Punktmenge \mathcal{P} (3.9 (15)). Dadurch kann man bei festgehaltenem Punkt Z mit Hilfe von $\Phi_Z^{-1} : \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{P}$ ($\tau_{ZP} \mapsto P$) jeden Punkt P eindeutig als $P = \tau_{ZP}(Z)$ festlegen. $\tau = \tau_{ZP}$ ist dabei die eindeutig bestimmte Translation, die Z in P überführt. Die Darstellung von τ als τ_{ZP} mit „erstem“ Punkt Z wird in der Analytischen Geometrie als „Ortsvektor“ bzgl. Z bezeichnet.

Weiter ist die *gegenseitige Lage zweier Punkte A und B* durch die eindeutig bestimmte *Translation* τ_{AB} bestimmt, die *A* in *B* überführt. τ_{AB} ist durch die Darstellung der Translationen mit *Z* an „erster“ Stelle („Ortsvektoren“ bzgl. *Z*) so zu beschreiben:

Aus $\tau_{AB}\tau_{ZA} = \tau_{ZB}$ folgt: $\tau_{AB} = \tau_{ZB}\tau_{ZA}^{-1}$.



Figur 13

Die Geraden werden durch die Untergruppen \mathbf{T}_g von \mathbf{T} beschrieben (3.9 (15)): Die Punktmenge \mathcal{P}_g einer Geraden *g* ist die Bahn $\mathbf{T}_g(Q_0) = \{\tau(Q_0) \mid \tau \in \mathbf{T}_g\}$ eines Punktes Q_0 von *g* unter \mathbf{T}_g .

Die Translationsgruppe \mathbf{T} von \mathbf{A} ist also nicht irgendeine algebraische Struktur, die man aus den geometrischen Verhältnissen einer Desarguesschen Ebene herleiten kann. Die Eigenschaften von \mathbf{T} reflektieren umgekehrt in großem Maß die geometrische Struktur von \mathbf{A} .

Man könnte also schon jetzt durch Rechnen in \mathbf{T} geometrische Ergebnisse herleiten. Dies ist jedoch unhandlicher, als wenn man einen Vektorraum über einem (Schief-) Körper *K* zur Verfügung hat, mit dessen Hilfe man geometrische Probleme übersichtlicher behandeln und sie z.B. auch mit Hilfe von Gleichungssystemen mit Koeffizienten in *K* bearbeiten kann.

Als Vorbereitung zur Herleitung eines Schiefkörpers *K*, mit dessen Hilfe man auf \mathbf{T} eine Vektorraumstruktur definieren kann, betrachten wir im nächsten Kapitel Streckungen (die sich als der zweite Typ der Dilatationen erweisen werden).

4 Streckungen in (D)-Ebenen

$\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ sei eine (D)-Ebene. Für solche Ebenen behandeln wir in diesem Kapitel Streckungen, die wir konstruktiv einführen. Die Vorgehensweise und die Argumentationen sind ganz analog zu denen im vorigen Kapitel über Parallelverschiebungen. Daher fassen wir uns hier vielfach kürzer. An die Stelle von Parallelogrammen und ihren Eigenschaften treten jetzt gewisse Trapeze und deren Eigenschaften. Für die Beweise sind jetzt (D) (statt (d)) und damit zusammenhängende Sätze zu verwenden.

Wichtig für unsere Fragestellung sind folgende Ergebnisse:

- (1) Für alle Punkte Z ist die Menge \mathcal{S}_Z der Streckungen mit Zentrum Z eine (nicht notwendig abelsche) Gruppe (4.9 (14)).
- (2) Für alle Punkte A, B sind \mathcal{S}_A und \mathcal{S}_B isomorph (4.9 (16)).
- (3) \mathcal{S}_Z operiert scharf einfach transitiv auf den von Z verschiedenen Punkten einer jeden Geraden durch Z (4.9 (13)).

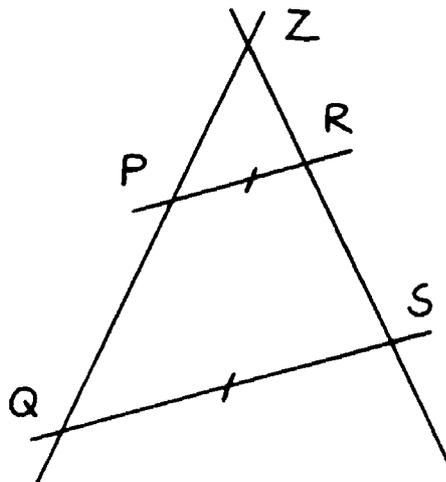
4.1 Definition. Z sei ein Punkt, P, Q, R, S seien Punkte, die von Z verschieden sind, mit den Eigenschaften:

P, Q, Z sind kollinear und R, S, Z sind kollinear.

Das geordnete Quadrupel (P, Q, R, S) heißt

(a) *eigentliches Z -Trapez*, wenn gilt:

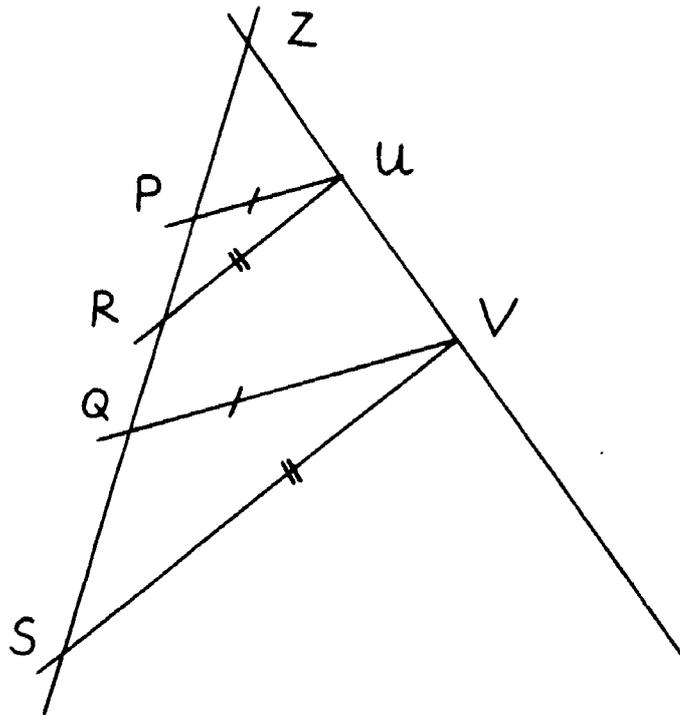
- (1) $P \neq Q$ und P, Q, R, S sind nicht kollinear;
- (2) $g(P, R) \parallel g(Q, S)$.



Figur 14

(P, Q, R, S) heißt *uneigentliches Z-Trapez*, wenn entweder 4.1 b) oder 4.1 c) gilt:

- 4.1 (b) (1) $P \neq Q$, P, Q, R, S kollinear;
 (2) Es gibt ein Punktepaar (U, V) , so daß sowohl (P, Q, U, V) als auch (R, S, U, V) eigentliche *Z-Trapeze* sind (Fig. 15).



Figur 15

4.1 (c) $P = Q, R = S$.

Bemerkungen.

- (1) Nach 4.1 c) ist (P, P, R, R) ein *Z-Trapez*.
 (2) Die Definition in 4.1 b) ist abhängig von den „Hilfspunkten“ (U, V) . Im folgenden Hilfssatz 4.2 zeigen wir die Unabhängigkeit davon.

4.2 Hilfssatz. Die Definition 4.1 b) eines uneigentlichen Z -Trapezes ist in folgendem Sinne unabhängig von dem Paar der „Hilfspunkte“ (U, V) :

(P, Q, U, V) und (R, S, U, V) seien eigentliche Z -Trapeze;

(P, Q, U', V') sei ein eigentliches Z -Trapez.

Dann ist auch (R, S, U', V') ein eigentliches Z -Trapez.

D.h., zum Test, ob (P, Q, R, S) ein *uneigentliches* Z -Trapez nach 4.1 b) ist, kann man jedes Paar (U, V) verwenden, so daß (P, Q, U, V) ein *eigentliches* Z -Trapez ist.

4.3 Hilfssatz. (P, Q, R, S) sei ein Z -Trapez. Dann sind auch (R, S, P, Q) und (Q, P, S, R) Z -Trapeze.

4.4 Definition. P, Q, R, S seien von Z verschiedene Punkte. Die geordneten Paare (P, Q) und (R, S) heißen Z -streckungsgleich, falls (P, Q, R, S) ein Z -Trapez ist.

Bemerkung. Man denke dabei an die Strahlensatzfigur, beachte aber, daß wir den Strahlensatz nicht zur Verfügung haben!

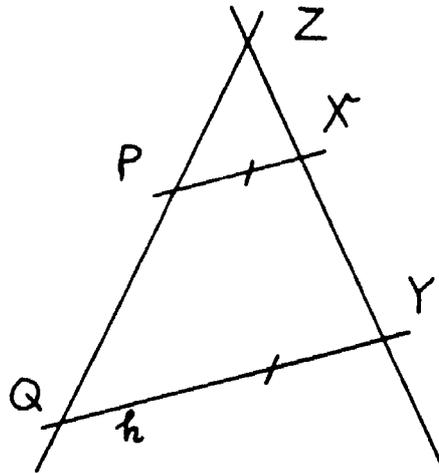
4.5 Satz. Die Z -Streckungsgleichheit ist eine Äquivalenzrelation auf $(\mathcal{P} \setminus \{Z\}) \times (\mathcal{P} \setminus \{Z\})$.

4.6 Satz. Zu jedem Punktepaar (P, Q) mit von Z verschiedenen Punkten P und Q , so daß P, Q, Z kollinear sind, gibt es zu jedem von Z verschiedenen Punkt X genau einen Punkt Y ($\neq Z$), so daß (P, Q) und (X, Y) Z -streckungsgleich sind (also (P, Q, X, Y) ein Z -Trapez ist).

Beweisandeutung für $P \neq Q$ und

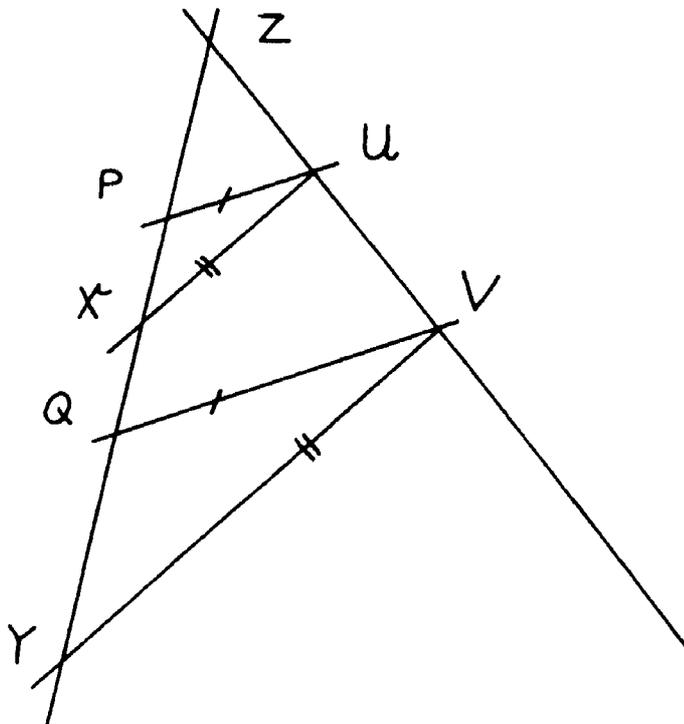
1. P, Q, X nicht kollinear (vgl. Figur 16).

h sei die Parallele zu $g(P, X)$ durch Q und Y der Schnittpunkt von h mit $g(Z, X)$. Dann ist (P, Q, X, Y) ein (eigentliches) Z -Trapez. Weiter überlegt man sich, daß Y der eindeutig bestimmte Punkt mit dieser Eigenschaft ist.



Figur 16

2. Für kollineare Punkte P, Q, X ($P \neq Q$) wähle man (U, V) so, daß (P, Q, U, V) ein eigentliches Z -Trapez ist. Dann konstruiert man Y von (U, V) und X ausgehend wie oben (Figur 17).



Figur 17

Bemerkung. In beiden Fällen liegt Y auf der Geraden $g(Z, X)$, und weiter ist Y der eindeutig bestimmte Punkt, der das Tripel (P, Q, X) zu einem Z -Trapez (P, Q, X, Y) ergänzt.

4.7 Definition. Für jeden Punkt Z und jedes Punktepaar (P, Q) , so daß P und Q verschieden von Z und P, Q, X kollinear sind, sei

$\sigma_{PQ} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ die folgende Abbildung:

(1) Für alle $X \in \mathcal{P} \setminus \{Z\}$ sei $\sigma_{PQ}X$ der nach 4.6 eindeutig bestimmte Punkt, so daß (P, Q) und (X, Y) Z -streckungsgleich sind.

(2) $\sigma_{PQ}Z := Z$

σ_{PQ} heißt *Streckung mit Zentrum Z* , bestimmt durch (P, Q) .

Mit S_Z wird die Menge aller Streckungen mit Zentrum Z bezeichnet.

4.8 Die Konstruktionsvorschrift für den Bildpunkt $\sigma_{PQ}X$ von X ergibt sich aus dem Beweis von 4.6: Man ergänze (für $X \neq Z$) das Tripel (P, Q, X) zum Z -Trapez (P, Q, X, Y) .

$\sigma_{PQ}X$ liegt (für $Z \neq X$) immer auf der Geraden $g(Z, X)$.

4.9 Eigenschaften der Streckungen.

(0) **Vorbemerkung.** Analog zu der Vorbemerkung 3.9 (0) bei den Parallelverschiebungen gilt hier: $(\mathcal{P} \setminus \{Z\}) \times (\mathcal{P} \setminus \{Z\})$ ist die elementfremde Vereinigung der Funktionsgraphen der Streckungen mit Zentrum Z (eingeschränkt auf $\mathcal{P} \setminus \{Z\}$). Daraus folgen wie in Kapitel 3 unmittelbar verschiedene der im folgenden aufgelisteten Eigenschaften von Streckungen.

(1) Der Graph von σ_{PQ} , eingeschränkt auf $(\mathcal{P} \setminus \{Z\}) \times (\mathcal{P} \setminus \{Z\})$, ist die Äquivalenzklasse von (P, Q) bezüglich der Z -Streckungsgleichheit.

(2) σ_{PQ} ist durch die Wirkung auf einen von Z verschiedenen Punkt bestimmt.

(3) σ_{PQ} ist bijektiv mit $\sigma_{PQ}^{-1} = \sigma_{QP}$.

(4) σ_{PP} ist die identische Abbildung (auf \mathcal{P}).

(5) $\sigma_{PQ}(P) = Q$.

(6) Es ist $\sigma_{PQ} = \sigma_{RS}$ genau dann, wenn (P, Q) und (R, S) Z -streckungsgleich sind.

Wir bezeichnen σ_{PQ} wieder als die *Darstellung* (mit Hilfe von (P, Q)) der Streckung, die durch die Äquivalenzklasse von (P, Q) bezüglich der Z -Streckungsgleichheit gegeben ist.

- (7) Ist $\sigma \neq \text{id}$, so hat σ genau einen Fixpunkt, nämlich Z . Das erhält man sofort aus der Konstruktionsvorschrift 4.8.
- (8) Eine Streckung σ erhält die Kollinearität:
Sind X_1, X_2, X_3 kollinear, so auch $\sigma X_1, \sigma X_2, \sigma X_3$.

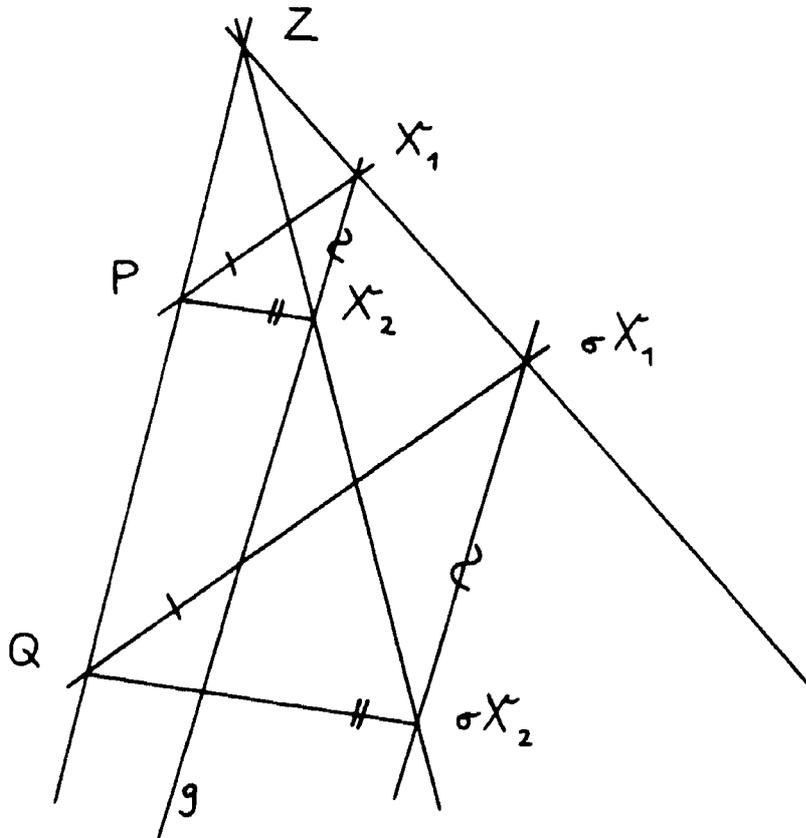
Beweisskizze für die Situation in der folgenden Figur 18:

Die Gerade, auf der die X_i liegen, heiße g . Nach Konstruktion von σX_1 und σX_2 (vgl. 4.8) gilt:

$g(P, X_1)$ ist parallel zu $g(Q, \sigma X_1)$, und $g(P, X_2)$ ist parallel zu $g(Q, \sigma X_2)$. Für die Dreiecke PX_1X_2 und $Q(\sigma X_1)(\sigma X_2)$ sind also die Voraussetzungen von (D) erfüllt, so daß nach (D) die Gerade $g(\sigma X_1, \sigma X_2)$ parallel zu $g = g(X_1, X_2)$ ist.

Betrachtet man entsprechend die Konstruktion von σX_1 und σX_3 (an Stelle von σX_2), so ist auch die Gerade $g(\sigma X_1, \sigma X_3)$ durch σX_1 parallel zu g , stimmt also nach (A2) mit $g(\sigma X_1, \sigma X_2)$ überein.

Man hat dann noch die anderen Lagemöglichkeiten der X_i zu betrachten.



Figur 18

Aus der Beweisskizze entnimmt man, daß die Gerade $g(\sigma X_1, \sigma X_2)$ parallel zu $g = g(X_1, X_2)$ ist.

(9) Aus (8) folgt wegen 2.2 (v):

Eine *Streckung* σ induziert eine *Kollineation* mit $\sigma(g(A, B)) = g(\sigma A, \sigma B)$.

Eine *Streckung* σ , die ursprünglich als Punktabbildung definiert war, wird in Zukunft immer als *Kollineation* betrachtet und wieder mit σ bezeichnet.

(10) Bei einer *Streckung* σ wird jede Gerade g auf eine dazu parallele Gerade abgebildet: $\sigma g \parallel g$ (vgl. die Bemerkung am Ende der Beweisskizze für (8)).

(11) (a) Aus (10) folgt, daß eine *Streckung* σ eine *Dilatation* ist. Ist $\sigma \neq \text{id}$, so hat σ genau einen Fixpunkt (vgl. (7)).

(b) S_Z stimmt mit der Menge \mathcal{D}_Z der *Dilatationen* mit Fixpunkt Z überein.

(12) Für *Streckungen* definiert man *Spuren* so wie bei *Parallelverschiebungen* (vgl. die Definition vor 3.9 (11)).

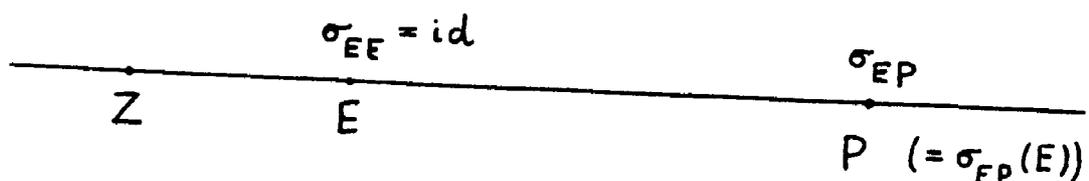
\mathcal{G}_Z sei das Geradenbüschel durch den Punkt Z . Dann gilt:

1. Die Menge der *Spuren* einer *Streckung* $\sigma \neq \text{id}$ mit Zentrum Z ist das Geradenbüschel \mathcal{G}_Z .

2. Eine Gerade g ist *Fixgerade* für σ genau dann, wenn g eine *Spur* ist.

Auch hier besteht wie bei den *Parallelverschiebungen* (vgl. 3.9 (15)) ein enger Zusammenhang zwischen der Menge \mathcal{S}_Z der *Streckungen* mit Zentrum Z und den Punktmengen auf jeder Geraden durch Z (vgl. Vorbemerkung (0)).

(13) Für jeden Punkt Z und jeden Punkt $E \neq Z$ ist die Abbildung $\mathcal{P}_{g(Z,E)} \setminus \{Z\} \rightarrow \mathcal{S}_Z$, definiert durch $P \mapsto \sigma_{EP}$ (der eindeutig bestimmten *Streckung* aus \mathcal{S}_Z , die E in P überführt), bijektiv mit der Umkehrabbildung $\sigma \mapsto \sigma(E)$.



Figur 19

Die von Z verschiedenen Punkte einer Geraden durch Z entsprechen also eineindeutig den Elementen aus \mathcal{S}_Z , genauer:

Die Elemente von \mathcal{S}_Z sind eineindeutig als Darstellungen σ_{EP} mit „erstem“ Punkt $E (\neq Z)$ und $P \neq Z, P \perp g(Z, E)$ charakterisiert. Umgekehrt sind die von Z verschiedenen Punkte von $g(Z, E)$ eineindeutig durch die Elemente aus \mathcal{S}_Z als $\sigma(E)$ gegeben.

Anders ausgedrückt (wenn bekannt ist, daß \mathcal{S}_Z eine Gruppe ist (14)):

\mathcal{S}_Z operiert vermöge $Q \mapsto \sigma(Q)$ scharf einfach transitiv auf $\mathcal{P}_g \setminus \{Z\}$ für alle Geraden g aus dem Geradenbüschel \mathcal{G}_Z durch Z .

Analog zu 3.9 (12) gilt hier

(14) **Satz.**

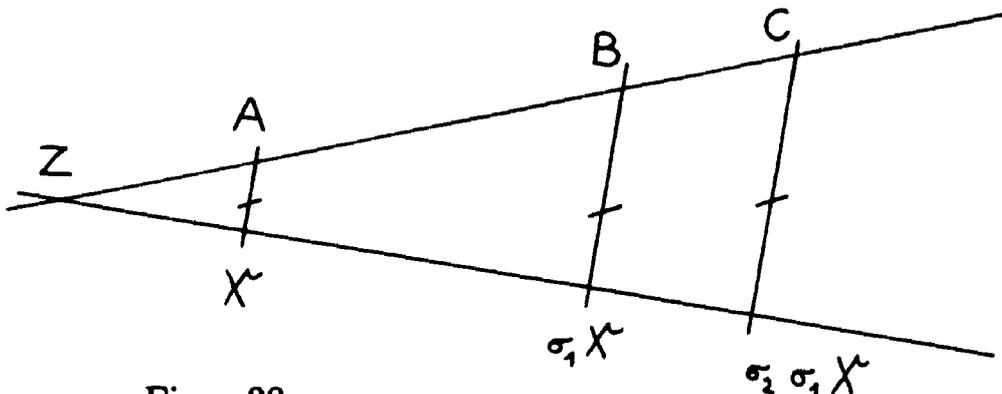
- (i) Für alle Punkte Z ist die Menge \mathcal{S}_Z der Streckungen mit Zentrum Z mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine (nicht notwendig abelsche) Gruppe. Für alle von Z verschiedenen Punkte A, B, C , so daß A, B, C, Z kollinear sind, gilt:

$$\sigma_{BC}\sigma_{AB} = \sigma_{AC}$$

- (ii) Gilt in der (D)-Ebene \mathbf{A} zusätzlich der große Satz (P) von Pappus-Pascal (vgl. Anhang), so ist \mathcal{S}_Z eine abelsche Gruppe.
- (iii) Nach (11) b) stimmt \mathcal{S}_Z mit der Gruppe \mathcal{D}_Z der Dilatationen mit Fixpunkt Z überein.

Beweisskizze zu i) (vgl. Figur 20).

Nach (13) (vgl. auch Vorbemerkung (0)) kann man für σ_1 eine Darstellung $\sigma_1 = \sigma_{AB}$ wählen, so daß X nicht auf $g(Z, A)$ liegt. σ_2 ist entsprechend als σ_{BC} darzustellen mit C auf $g(Z, A)$. Nach der Konstruktionsvorschrift (4.8) ist $g(B, \sigma_1 X) \parallel g(A, X)$ und $g(C, \sigma_2 \sigma_1 X) \parallel g(B, \sigma_1 X)$, also $g(C, \sigma_2 \sigma_1 X) \parallel g(A, X)$. Daraus folgt: $\sigma_2 \sigma_1 X = \sigma_{BC} \sigma_{AB} X = \sigma_{AC} X$. Den Fall $X \perp g(Z, A)$ führe man hierauf zurück.



Figur 20

(15) **Bemerkung.** Es gilt für eine affine Inzidenzebene A : Operieren für alle Punkte Z alle Untergruppen \mathcal{D}_Z der Dilatationen mit Fixpunkt Z auf den Punktmenge $\mathcal{P}_g \setminus \{Z\}$ für alle Geraden g aus \mathcal{G}_Z scharf einfach transitiv, so ist die Inzidenzebene A eine Desarguessche Ebene.

(16) **Satz.** Alle Gruppen von Streckungen mit verschiedenen Zentren sind isomorph, es gilt:

$$\mathcal{S}_W = \tau_{ZW} \mathcal{S}_Z \tau_{ZW}^{-1} \quad (\simeq \mathcal{S}_Z).$$

(17) Wir geben jetzt folgenden Spezialfall von 3.9 (18a) an, da er einen guten Einblick in den geometrischen Hintergrund dieser Aussage liefert:

Satz. Für alle $\sigma \in \mathcal{S}_Z$ und alle Translationen τ (in der Darstellung τ_{ZR} (3.9 (15))) gilt:

$$\sigma \tau_{ZR} \sigma^{-1} = \tau_{Z\sigma R}.$$

Im Anhang skizzieren wir einen geometrisch orientierten Beweis hierfür.

(18) Zur späteren Verwendung bemerken wir folgendes: g sei eine Gerade durch Z und $E \neq Z$ ein Punkt auf g , so daß also $g = g(Z, E)$ ist. In (17) halte man $R = E$ fest. Dann ist $\sigma \tau_{ZE} \sigma^{-1} = \tau_{Z\sigma E}$ ein Element $\neq \text{id}$ von $\mathbf{T}_g = \mathbf{T}_{g(Z, E)}$, da $\sigma E \perp g$ und $\sigma E \neq Z$. Die Konjugation mit σ werde als ι_σ geschrieben. Dann erhält man nach (17) eine Abbildung

$$\begin{aligned} \beta : \iota(\mathcal{S}_Z) &\longrightarrow \mathbf{T}_g \setminus \{\text{id}\} \\ \iota_\sigma &\longmapsto \iota_\sigma(\tau_{ZE}) = \sigma \tau_{ZE} \sigma^{-1} = \tau_{Z\sigma E}. \end{aligned}$$

Es gilt: β ist bijektiv.

Die Surjektivität schreibt sich demnach als $\iota(\mathcal{S}_Z)(\tau_{ZE}) = \mathbf{T}_{g(Z, E)} \setminus \{\text{id}\}$.

β entspricht der Umkehrabbildung $\sigma \mapsto \sigma(E)$ (vgl. (13)), die \mathcal{S}_Z bijektiv auf $\mathcal{P}_{g(Z, E)} \setminus \{Z\}$ abbildet, jetzt auf die Situation mit Quelle $\iota(\mathcal{S}_Z)$ und Ziel $\mathbf{T}_{g(Z, E)}$ übertragen.

Beweis: β ist injektiv:

Aus $\tau_{Z(\sigma_1 E)} = \tau_{Z(\sigma_2 E)}$ folgt nach 3.9 (15b):

$$\sigma_1(E) = \sigma_2(E)$$

und damit nach (13) $\sigma_1 = \sigma_2$, also $\iota_{\sigma_1} = \iota_{\sigma_2}$.

β ist surjektiv:

Nach 3.9 (15b) gilt $\mathbf{T}_g \setminus \{\text{id}\} = \{\tau_{ZP} \mid P \mid g, P \neq Z\}$. Wegen (13) ist $P = \sigma_{EP}(E)$ also nach (17)

$$\sigma_{EP} \tau_{ZE} \sigma_{EP}^{-1} = \tau_{Z\sigma_{EP}(E)} = \tau_{ZP}.$$

□

**5 \mathbf{T} als Vektorraum über dem Schiefkörper K
 der spurtreuen Endomorphismen von \mathbf{T} ;
 die \mathbf{A} zugeordnete affine Ebene bezüglich ${}_K\mathbf{T}$
 (im Sinne der Linearen Algebra)**

$\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ sei wieder eine (D)-Ebene, \mathbf{T} die Gruppe der Translationen (Parallelverschiebungen) von \mathbf{A} , \mathcal{S}_Z die Gruppe der Streckungen mit Zentrum Z .

In diesem Kapitel leiten wir mit Hilfe der im vorigen Abschnitt behandelten Streckungen einen Schiefkörper K her und zwar so, daß \mathbf{T} ein zweidimensionaler Vektorraum über K wird (Theorem 5.9). Die Herleitung von K geschieht außerdem so, daß die K -Vektorraumstruktur auf \mathbf{T} die geometrische Struktur von \mathbf{A} gut widerspiegelt. Auf diese Weise kann man dann \mathbf{A} mit Hilfe des Vektorraums ${}_K\mathbf{T}$ als affine Ebene im Sinne der Linearen Algebra beschreiben (Theorem 5.11).

Zur Hinführung auf unser Vorgehen erinnern wir daran, daß der Endomorphismenring $\text{End } V$ einer abelschen Gruppe $(V, +)$ so definiert ist, daß er in „natürlicher“ Weise auf V operiert:

$$\begin{aligned} \text{End } V \times V &\longrightarrow V \\ (\varphi, x) &\longmapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

Dabei gelten nach der Definition der Verknüpfungen in $\text{End } V$ folgende Gesetzmäßigkeiten (für alle $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \text{End } V$ und für alle $x, y \in V$):

- | | | |
|-------|--|--|
| (i) | $\text{id}_{\mathbf{T}}(x) = x$ | ($\text{id}_{\mathbf{T}} := \text{id}$ auf \mathbf{T}) |
| (ii) | $(\varphi_1\varphi_2)(x) = \varphi_1(\varphi_2(x))$ | (Def. der Multiplikation
in $\text{End } V$) |
| (iii) | $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ | (φ ist Endomorphismus
von $(V, +)$) |
| (iv) | $(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ | (Def. der Addition
in $\text{End } V$). |

V ist in algebraischer Sprechweise ein $\text{End } V$ -Modul.

Wir nehmen jetzt die abelsche Gruppe \mathbf{T} der Translationen von \mathbf{A} und suchen einen Unterring K von $\text{End } \mathbf{T}$, der Schiefkörper ist. Dann wirkt K auf \mathbf{T} gemäß den obigen Gesetzmäßigkeiten (i) bis (iv), so daß \mathbf{T} über K ein Vektorraum wird.

Bei der Suche nach K lassen wir uns davon leiten, daß die geometrischen Gesetzmäßigkeiten in \mathbf{A} durch die K -Vektorraumstruktur auf \mathbf{T} gut widerspiegelt werden sollen:

Nach 3.9 (15) ist die Punktmenge \mathcal{P}_g einer Geraden g die Bahn eines Punktes P_0 von g unter $\mathbf{T}_g < \mathbf{T}$: $\mathcal{P}_g = \mathbf{T}_g(P_0)$. In der Analytischen Geometrie ist eine Gerade nach Definition die Bahn eines Punktes unter der Wirkung eines eindimensionalen Untervektorraums des zugrundeliegenden Vektorraums. Sollen also die geometrischen Verhältnisse in \mathbf{A} durch Eigenschaften von ${}_K\mathbf{T}$ reflektiert werden, müssen die \mathbf{T}_g eindimensionale Untervektorräume werden. Für die Elemente $\varphi \in \text{End } \mathbf{T}$ des gesuchten Körpers K muß also gelten: $\varphi(\mathbf{T}_g) = \mathbf{T}_g$. Nur solche Endomorphismen von \mathbf{T} werden ins Auge gefaßt.

5.1 Definition. $\varphi \in \text{End } \mathbf{T}$ heißt *spurtreu*, wenn für alle Geraden $g \in \mathcal{G}$ gilt:

$$\varphi(\mathbf{T}_g) \subset \mathbf{T}_g.$$

Bemerkung. Man hätte äquivalent dazu definieren können: Für alle $\tau \in \mathbf{T}$ gilt: Ist Π_g Richtung für τ , so ist Π_g Richtung für $\varphi\tau$.

5.2 Definition. κ sei eine Kollineation. Dann bezeichnen wir die Abbildung $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, gegeben durch $\tau \mapsto \kappa\tau\kappa^{-1}$ („Konjugation“ mit κ) mit ι_κ (vgl. 3.9 (18)).

5.3 Bemerkung. Bekanntlich ist ι_κ ein Endomorphismus von \mathbf{T} , denn es gilt $\iota_\kappa(\tau_1\tau_2) = \kappa\tau_1\tau_2\kappa^{-1} = \kappa\tau_1\kappa^{-1}\kappa\tau_2\kappa^{-1} = \iota_\kappa(\tau_1)\iota_\kappa(\tau_2)$.

3.9 (19) besagte: Für alle Dilatationen δ gilt:
 $\delta\mathbf{T}_g\delta^{-1} = \iota_\delta(\mathbf{T}_g) \subset \mathbf{T}_g$. $\iota_\delta \in \text{End } \mathbf{T}$ ist also spurtreu. Das gilt nicht für beliebige Kollineationen (vgl. 3.9 (18)).

Weiter ist der Nullendomorphismus \mathcal{O} : $\mathcal{O}(\tau) = \text{id}$ (auf \mathcal{P}) für alle $\tau \in \mathbf{T}$ spurtreu, da id nach Def. alle Π_g als Richtungen hat. Man beachte, daß id (auf \mathcal{P}) das neutrale Element von \mathbf{T} ist.

Somit ist bisher bekannt, daß die Menge $\iota(\text{Dil}(\mathbf{A})) \cup \{\mathcal{O}\}$ aus spurtreuen Endomorphismen besteht. Wir untersuchen daher $\iota(\text{Dil}(\mathbf{A}))$ genauer.

5.4 Satz. $\iota : \text{Dil}(\mathbf{A}) \rightarrow \text{End } \mathbf{T}$ sei die Abbildung $\iota(\delta) := \iota_\delta$ (Def. 5.2). Dann gilt:

(1) ι ist ein Monoidhomomorphismus:

$$\iota\delta_1\delta_2 = \iota\delta_1\iota\delta_2.$$

(2) ι_δ ist invertierbar mit $\iota_\delta^{-1} = \iota_{\delta^{-1}}$.

(3) ι_δ ist spurtreu.

(4) $\ker \iota = \mathbf{T}$.

(5) Für alle Punkte Z gilt $\iota(\text{Dil}(\mathbf{A})) = \iota(\mathcal{S}_Z)$.

(6) $\iota|_{\mathcal{S}_Z}$ ist injektiv.

(7) $\mathcal{S}_Z \simeq \iota(\mathcal{S}_Z)$.

(8) Es gilt also für jeden Punkt Z :

$$\iota(\text{Dil}(\mathbf{A})) = \iota(\mathcal{S}_Z) \simeq \text{Dil}(\mathbf{A})/\mathbf{T} \simeq \mathcal{S}_Z.$$

Einige Beweisandeutungen:

(1) erhält man durch Nachrechnen.

Zu (4): a) $\mathbf{T} \subset \ker \iota$, da \mathbf{T} kommutativ (so daß alle $\iota_\tau = \text{id}_{\mathbf{T}}$ (id auf \mathbf{T}) sind).

b) Also sind noch die Bilder von Streckungen σ zu betrachten. Sei $\sigma \in \mathcal{S}_A$, dann stelle man die Elemente $\tau \in \mathbf{T}$ als τ_{AP} dar (3.9 (15a)). $\iota_\sigma = \text{id}_{\mathbf{T}}$ schreibt sich dann als $\iota_\sigma(\tau) = \tau$ für alle $\tau \in \mathbf{T}$, also als

$$\sigma\tau_{AP}\sigma^{-1} = \tau_{AP} \quad (\text{für alle } P).$$

Da $\sigma\tau_{AP}\sigma^{-1} = \tau_{A\sigma P}$ (4.9 (17)) ist, muß also gelten

$$\tau_{A\sigma P} = \tau_{AP} \quad (\text{für alle } P),$$

woraus folgt $\sigma P = P$ (3.9 (15a)). Daraus folgt: $\sigma = \text{id}_{\mathcal{P}}$ (id auf \mathcal{P}).

Zu (5): Man zeigt, daß sich für jeden Punkt Z jede Dilatation δ eindeutig als $\delta = \tau\sigma$ mit $\tau \in \mathbf{T}$ und $\sigma \in \mathcal{S}_Z$ schreiben läßt. (Dil(A) ist das semidirekte Produkt von \mathbf{T} und \mathcal{S}_Z .) Dazu beachtet man, daß es genau zwei Typen von Dilatationen (die verschieden von id sind) gibt: Translationen und Streckungen. Nach 4.9 (16) gilt $\mathcal{S}_W = \tau_{ZW}\mathcal{S}_Z\tau_{ZW}^{-1}$, d.h. $w \in \mathcal{S}_W$ hat eine Darstellung $w = \tau_{ZW}\sigma\tau_{ZW}^{-1}$ mit $\sigma \in \mathcal{S}_Z$. Es gilt also $w = \tau_{ZW}\sigma\tau_{ZW}^{-1}\sigma^{-1}\sigma$. Da $\sigma\tau_{ZW}^{-1}\sigma^{-1}$ aus \mathbf{T} ist (3.9 (18)), gilt $w = \tau'\sigma$ mit $\tau' \in \mathbf{T}$, $\sigma \in \mathcal{S}_Z$. Die Eindeutigkeit folgt aus $\mathcal{S}_Z \cap \mathbf{T} = \{\text{id}\}$. Also ist $\iota(w) = \iota(\tau'\sigma) = \iota_{\tau'}\iota_\sigma = \iota_\sigma \in \iota(\mathcal{S}_Z)$.

Zu (6): Diese ist bereits in (4) gezeigt.

Zu (7): Folge von (6) und (1).

5.5 Definition. K sei die Menge der spurtreuen Endomorphismen von \mathbf{T} .

Wie oben bereits erwähnt, gilt $\iota(\text{Dil}(\mathbf{A})) \cup \{\mathcal{O}\} \subset K$.
 $\iota(\text{Dil}(\mathbf{A})) \cup \{\mathcal{O}\}$ ist zwar multiplikativ abgeschlossen, es ist aber nicht bekannt, ob das auch bezüglich der Addition gilt. Unmittelbar erhält man:

5.6 Satz. K ist ein Unterring von $\text{End } \mathbf{T}$.

Beweisandeutung: $\varphi_1, \varphi_2 \in K$, also $\varphi_i(\mathbf{T}_g) \subset \mathbf{T}_g$. Daraus folgt
 $(\varphi_1\varphi_2)(\mathbf{T}_g) = \varphi_1(\varphi_2\mathbf{T}_g) \subset \varphi_1(\mathbf{T}_g) \subset \mathbf{T}_g$. Für $\tau \in \mathbf{T}_g$ gilt
 $(\varphi_1 + \varphi_2)(\tau) = (\varphi_1\tau) + (\varphi_2\tau) \in \mathbf{T}_g$, da $\varphi_i\tau \in \mathbf{T}_g$; analog für $\varphi_1 - \varphi_2$.

Nun gilt der wichtige Satz:

5.7 Satz.

- (a) Jeder spurtreue Endomorphismus φ von \mathbf{T} , der verschieden von Null ist, ist injektiv.
- (b) Zu jedem von Null verschiedenen spurtreuen Endomorphismus φ von \mathbf{T} gibt es zu jedem Punkt Z eine eindeutig bestimmte Streckung $\sigma \in \mathcal{S}_Z$, so daß gilt:

$$\varphi = \iota_\sigma.$$

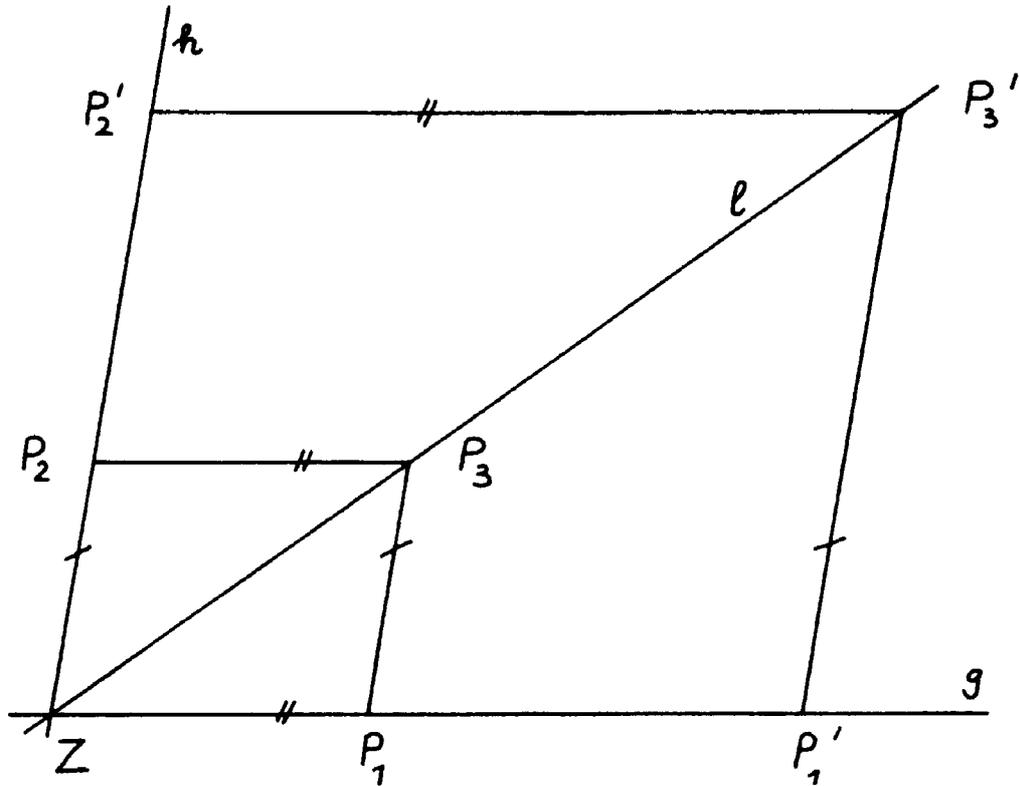
Beweisskizze. Zu a): Wegen $\varphi \neq \mathcal{O}$ gibt es $\text{id} \neq \tau_1 \in \mathbf{T}$ mit $\varphi(\tau_1) \neq \text{id}$ (auf \mathcal{P}). Ein solches τ_1 sei aus \mathbf{T}_g . Wähle $h \not\parallel g$. Dann ist (3.9 (11)) $\mathbf{T} = \mathbf{T}_h \mathbf{T}_g$ (direkte Summe). Ist $\text{id} \neq \tau_2 \in \mathbf{T}_h$, so ist $\tau_2\tau_1$ ($\neq \text{id}$) weder aus \mathbf{T}_g noch aus \mathbf{T}_h (Eindeutigkeit der Darstellung in direkten Summen).

Also ist $\tau_2\tau_1 \in \mathbf{T}_\ell$ mit ℓ weder zu g noch zu h parallel. Aus der Spurtreue von φ folgt mit $\tau_3 := \tau_2\tau_1$ $\varphi(\tau_3) = \varphi(\tau_2\tau_1) = (\varphi\tau_2)(\varphi\tau_1) =: \tau'_3 \in \mathbf{T}_\ell$.

Die Annahme $\varphi\tau_2 = \text{id}$ führt zum Widerspruch: $\varphi\tau_1 \in \mathbf{T}_g \cap \mathbf{T}_\ell = \{\text{id}\}$, entgegen $\varphi\tau_1 \neq \text{id}$. Daher gilt $\varphi|_{\mathbf{T}_h}$ ist injektiv. Durch Vertauschen der Rollen von g und h folgt $\varphi|_{\mathbf{T}_g}$ ist injektiv, woraus wegen $\mathbf{T} = \mathbf{T}_h \mathbf{T}_g$ die Injektivität von φ folgt.

Zu b): Aus diesem Beweis für a) folgt: Wählt man $Z \in \mathcal{P}$ und $g, h \in \mathcal{G}_Z$ ($g \neq h$), und stellt man $\text{id} \neq \tau_2 = \tau_{ZP_2} \in \mathbf{T}_h$ (mit $P_2 \perp h$) sowie $\text{id} \neq \tau_1 = \tau_{ZP_1} \in \mathbf{T}_g$ (mit $P_1 \perp g$) bezüglich Z als ersten Punkt dar, so ist $\tau_3 = \tau_2\tau_1 = \tau_{ZP_2}\tau_{ZP_1} = \tau_{ZP_3} \neq \text{id}$ (mit $P_3 \perp \ell \neq g, h$), und damit ist (Z, P_1, P_2, P_3) ein eigentliches Parallelogramm (vgl. Figur 21). Mit den Bezeichnungen $\varphi(\tau_{ZP_1}) =: \tau_{ZP'_1}$, $\varphi(\tau_{ZP_2}) =: \tau_{ZP'_2}$ und $\varphi(\tau_{ZP_3}) =: \tau_{ZP'_3}$

(also mit $P'_1 \text{I} g$, $P'_2 \text{I} h$, $P'_3 \text{I} \ell$) ist auch (Z, P'_1, P'_2, P'_3) ein eigentliches Parallelogramm. Nun sei $\sigma \in S_Z$ die nach 4.9 (13) eindeutig bestimmte Streckung, die P_1 mit P'_1 überführt, dann folgt $P'_2 = \sigma P_2$, also $\varphi(\tau_2) = \iota_\sigma(\tau_2)$. Das gilt für alle $\text{id} \neq \tau_2 \in T_A$, also $\varphi|_{T_A} = \iota_\sigma|_{T_A}$. Entsprechend gilt $\varphi|_{T_g} = \iota_\sigma|_{T_g}$, woraus insgesamt $\varphi = \iota_\sigma$ folgt.



Figur 21

Als Folgerung aus dem Bisherigen ergibt sich:

5.8 Satz. $\iota(\text{Dil}(\mathbf{A})) \cup \{\mathcal{O}\}$ ist ein Unterring in $\text{End } \mathbf{T}$, der mit dem Unterring K der spurtreuen Endomorphismen von \mathbf{T} übereinstimmt. Alle von Null verschiedenen Elemente aus K sind invertierbar. K ist also ein Schiefkörper, für dessen multiplikative Gruppe gilt:

$$(K \setminus \{\mathcal{O}\}, \cdot) = (\iota(\text{Dil}(\mathbf{A})), \cdot) = (\iota(S_Z), \cdot) \simeq (S_Z, \circ)$$

für alle Punkte Z .

Man beachte, daß $K = \iota(\text{Dil}(\mathbf{A})) \cup \{\mathcal{O}\}$ nicht von irgendwelchen speziellen geometrischen Gegebenheiten, also auch nicht von Z (mit $\iota(\text{Dil}(\mathbf{A})) = \iota(S_Z)$) abhängt. Für *jeden* Punkt Z kann man die multiplikative Gruppe $(K \setminus \{\mathcal{O}\}, \cdot)$ von K als $(\iota(S_Z), \cdot)$ darstellen.

Die bisherigen Erörterungen fassen wir als *einen Hauptsatz* zusammen:

5.9 Theorem. $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ sei eine Desarguessche Ebene ((D)-Ebene). Dann gilt:

- (1) Ist K der Ring der spurtreuen Endomorphismen der Gruppe der Translationen \mathbf{T} von \mathbf{A} , so ist für alle $Z \in \mathcal{P}$:

$$K = \iota(\text{Dil}(\mathbf{A})) \cup \{\mathcal{O}\} = \iota(\mathcal{S}_Z) \cup \{\mathcal{O}\}.$$

- (2) K ist ein Schiefkörper mit

$$(K \setminus \{\mathcal{O}\}, \cdot) = (\iota(\text{Dil}(\mathbf{A})), \cdot) = (\iota(\mathcal{S}_Z), \cdot) \simeq (\mathcal{S}_Z, \cdot)$$

(für alle $Z \in \mathcal{P}$).

- (3) Gilt der große Satz (P) von Pappus-Pascal in \mathbf{A} , so ist K ein Körper.
- (4) \mathbf{T} ist vermöge $K \times \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T} ((\varphi, \tau) \mapsto \varphi(\tau))$ ein Vektorraum der Dimension 2 über K .
- (5) Die eindimensionalen Unterräume von ${}_K\mathbf{T}$ sind von der Gestalt ${}_K\mathbf{T}_g$ (für alle $g \in \mathcal{G}$).

Zum Beweis: (1) und (2) ist Satz 5.8. (3) folgt wegen (2) aus 4.9 (14ii).

Zu (4) vergleiche man die einführende Betrachtung zu diesem Kapitel. Die Dimensionsaussage folgt aus $\mathbf{T} = \mathbf{T}_g \mathbf{T}_h$ (direkte Summe) mit (5).

Zu (5): Daß \mathbf{T}_g ein K -Untervektorraum ist, folgt daraus, daß K der Schiefkörper der spurtreuen Endomorphismen ist. Daß die Dimension 1 ist, ist in der nachfolgenden Betrachtung enthalten. Andererseits ist jeder eindimensionale Unterraum von der Gestalt $K\tau$ mit $\tau \neq \text{id}$, $\tau = \tau_{ZE} \in \mathbf{T}$. Nach (1) gilt also: $K\tau = \iota(\mathcal{S}_Z)(\tau) \cup \mathcal{O}(\tau) = (\mathbf{T}_{g(Z,P)} \setminus \{\text{id}\}) \cup \{\text{id}\} = \mathbf{T}_{g(Z,P)}$. (vgl. 4.9 (18)).

5.10 Bemerkungen.

- (1) Da wir bisher nur vorausgesetzt hatten, daß eine (D)-Ebene \mathbf{A} vorliegt, kann man über den Schiefkörper K der spurtreuen Endomorphismen von \mathbf{T} keine speziellen Aussagen machen, außer z.B.: Die Elemente von K entsprechen eineindeutig den Punkten einer (beliebigen) Geraden $g = g(Z, E)$. Denn es ist $K = \iota(\mathcal{S}_Z) \cup \{\mathcal{O}\}$, und nach 4.9 (18) ist die Abbildung $\iota(\mathcal{S}_Z) \cup \{\mathcal{O}\} \rightarrow \mathbf{T}_{g(Z,E)} \setminus \{\text{id}\} \cup \{\text{id}\} = \mathbf{T}_{g(Z,E}$ ($\iota_\sigma \mapsto \iota_\sigma(\tau_{ZE})$) bzw. $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}(\tau_{ZE}) = \text{id}$ (auf \mathcal{P})) bijektiv. $\mathbf{T}_{g(Z,E)}$ wird nach 3.9 (15) durch $\tau \mapsto \tau(Z)$ bijektiv auf $\mathcal{P}_{g(Z,E)}$ abgebildet.

Sind in \mathbf{A} weitere Axiome erfüllt, ergeben sich zusätzliche Aussagen für K . Ist z.B. \mathbf{A} eine angeordnetet (D)-Ebene, d.h.,

gibt es für die Punkte jeder Geraden eine lineare Anordnung und sind Verträglichkeiten zwischen den Anordnungen auf den verschiedenen Geraden erfüllt, so wird K ein angeordneter Schiefkörper. Sind die Anordnungen auf den Geraden archimedisch, so wird K ein archimedisch angeordneter Schiefkörper, also ein Unterkörper des reellen Zahlkörpers \mathbb{R} . Ist die Anordnung zusätzlich vollständig (ist z.B. das Dedekindsche Schnittaxiom oder ein dazu äquivalentes erfüllt), so wird K der reelle Zahlkörper \mathbb{R} .

- (2) Hilbert hatte in [3] die sogenannte Streckenrechnung eingeführt, in der er mit den geordneten Paaren (Z, P) (Z fest auf $g = g(Z, E)$, $P \in g$) von Punkten auf einer Geraden rechnet. Der so entstehende Körper \mathcal{K} der Hilbertschen Streckenrechnung bezüglich des Nullpunktes Z und der Einheitsstrecke (Z, E) auf $g(Z, E)$ kann aus K gewonnen werden als $\mathcal{K} = K(\tau_{ZE})$, d.h. durch die Auswertung der spurtreuen Endomorphismen an der festen Stelle τ_{ZE} (vgl. den Anfang der Bemerkung (1)).

Da wir bei der Einführung von K darauf geachtet haben, daß sich in dem damit zu bildenden Vektorraum ${}_K\mathbf{T}$ die geometrische Struktur der (D)-Ebene \mathbf{A} widerspiegelt, erhalten wir als *zweiten Hauptsatz*

5.11 Theorem. $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathbf{I})$ sei eine (D)-Ebene, \mathbf{T} die (abelsche) Gruppe der Translationen von \mathbf{A} , K der Schiefkörper der spurtreuen Endomorphismen von \mathbf{T} , $t : {}_K\mathbf{T} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ die Operation $(\tau, P) \mapsto \tau(P)$ von \mathbf{T} auf der Punktmenge \mathcal{P} . Dann ist das Tripel $(\mathcal{P}, {}_K\mathbf{T}, t)$ eine affine Ebene im Sinne der Linearen Algebra.

Zur Erinnerung weisen wir darauf hin, daß affine Ebenen entweder so definiert werden, daß t scharf einfach transitiv auf \mathcal{P} operiert oder äquivalent in folgender Weise:

Es gibt eine Abbildung $\alpha : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{T}$ ($\alpha(P, Q) =: \overrightarrow{PQ}$), so daß gilt:

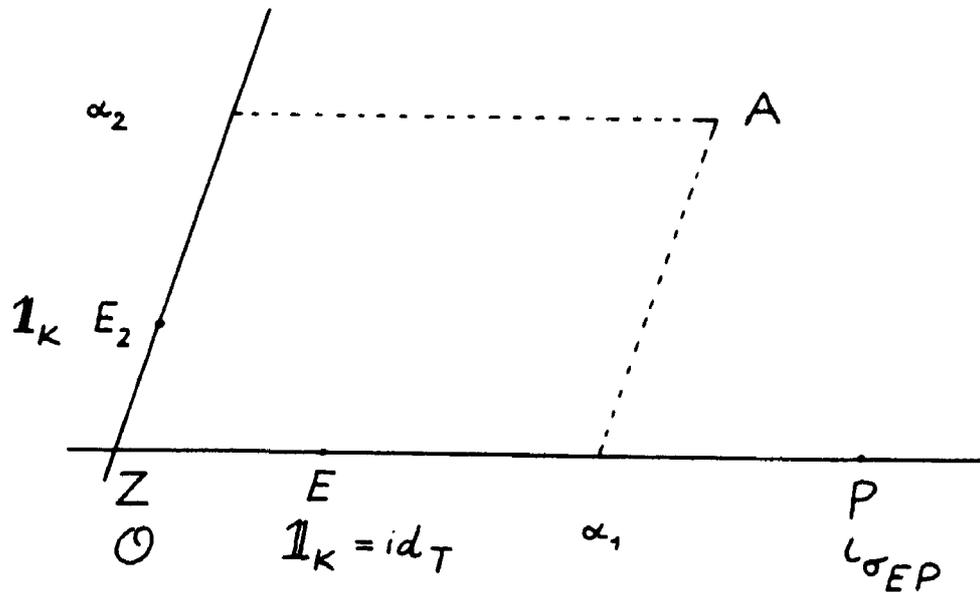
- (1) Für alle Punkte P und alle τ aus \mathbf{T} gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt Q : $\tau = \overrightarrow{PQ}$ und
- (2) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Dabei ist $\alpha(P, Q)$ das eindeutig bestimmte Element $\tau \in \mathbf{T}$, so daß $t(\tau, P) = Q$ oder umgekehrt $t(\tau, P)$ der eindeutig bestimmte Punkt Q , so daß $\alpha(P, Q) = \tau$ ist.

5.12 Bemerkungen.

- (1) Die Geraden in der so definierten affinen Ebene $(\mathcal{P}, {}_K\mathbf{T}, t)$ im Sinne der Linearen Algebra (kurz als *algebraische affine Ebene* bezeichnet) entsprechen eineindeutig den Geraden der Ausgangsebene. Eine Gerade in $(\mathcal{P}, {}_K\mathbf{T}, t)$ ist die Bahn eines Punktes unter einem eindimensionalen Untervektorraum von ${}_K\mathbf{T}$, also die Bahn von Q_0 unter $K\tau$ ($\tau \neq \text{id}$). Stellt man τ als τ_{Q_0R} dar, so ist $K\tau_{Q_0R}(Q_0) = \mathcal{P}_{g(Q_0, R)}$ (vgl. den Beginn der Bemerkung 5.10 (1)). Der algebraische affine Raum $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, {}_K\mathbf{T}, t)$, den wir $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ zuordnen, reflektiert also bezüglich der Inzidenz (und der Parallelität) die geometrische Struktur von \mathbf{A} . Daher ist es möglich, geometrische Probleme in \mathbf{A} jetzt mit Hilfe von $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, {}_K\mathbf{T}, t)$ mit den Mitteln der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra zu bearbeiten.
- (2) Ohne Beweis sei folgende wichtige Tatsache angegeben: Sind die (D)-Ebenen $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ und $\mathbf{A}' = (\mathcal{P}', \mathcal{G}', I')$ vermöge einer Kollinearität λ isomorph, so gibt es eine Semiaffinität zwischen den zugeordneten algebraischen affinen Ebenen $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, {}_K\mathbf{T}, t)$ und $\mathcal{A}' = (\mathcal{P}', {}_K\mathbf{T}', t')$ und umgekehrt. Es gibt insgesamt eine bijektive Abbildung der Menge der Isomorphieklassen von (D)-Ebenen bezüglich Kollinearitäten auf die Menge der Isomorphieklassen von algebraischen affinen Ebenen bezüglich Semiaffinitäten. Man beachte dabei, daß man einer algebraischen affinen Ebene $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, {}_K\mathbf{V}, t)$ in „natürlicher“ Weise die (D)-Ebene $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \varepsilon)$ zuordnen kann, wobei \mathcal{G} die Geradenmenge von \mathcal{A} und ε die Enthaltenseinsrelation der Mengenlehre ist. Der Satz von Desargues gilt in \mathcal{A} , wie aus der Analytischen Geometrie bekannt ist. Die obige Bijektivität besagt also z.B.: Ordnen wir einer (D)-Ebene $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ die algebraische affine Ebene $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, {}_K\mathbf{T}, t)$ gemäß 5.11 zu und dieser die eben beschriebene (D)-Ebene \mathbf{A}' , so sind \mathbf{A}' und \mathbf{A} isomorph bezüglich Kollinearitäten.
- (3) Vermöge der $\mathbf{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ zugeordneten algebraischen affinen Ebene $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, {}_K\mathbf{T}, t)$ gemäß 5.11 kann man in \mathbf{A} in bekannter

Weise Koordinatensysteme einführen. Sei (Z, E, E_2) mit nicht kollinearen Punkten Z, E, E_2 ein solches (Figur 22), das auch als (Z, τ_E, τ_{E_2}) bezeichnet werden kann ((τ_{ZE}, τ_{ZE_2}) ist Basis von \mathbf{T} !), vgl. Figur 22.



Figur 22

Ist P ein Punkt von $g(Z, E)$, auf der E der Einheitspunkt sei, so erhält P das Element $\iota_{\sigma_{EP}} \in K$ als Koordinate, da $\iota_{\sigma_{EP}}$ das eindeutig bestimmte Element aus K ist, so daß nach 4.9 (17) und (5) $\iota_{\sigma_{EP}}(\tau_{ZE}) = \tau_{Z\sigma_{EP}(E)} = \tau_{ZP}$ („Ortsvektor“ von P bzgl. Z) gilt und andererseits P eindeutig durch τ_{ZP} bezüglich Z bestimmt ist.

Geometrisch betrachtet ist die so mit Elementen aus K bezifferte Gerade $g(Z, E)$ als eine *Zahlengerade* anzusehen (vgl. auch (5)). Bezüglich des Koordinatensystems (O, E, E_2) bzw. $(O, \tau_{OE}, \tau_{OE_2})$ erhält ein Punkt $A \in \mathcal{P}$ also die Koordinaten $(\alpha_1, \alpha_2) \in K \times K$, wenn gilt $\tau_{OA} = (\alpha_1 \tau_{OE})(\alpha_2 \tau_{OE_2})$ (eindeutige Darstellung von τ_{OA} durch die Basis (τ_{OE}, τ_{OE_2}) von ${}_K\mathbf{T}$).

- (4) Mit den Bezeichnungen aus (3) haben wir insgesamt (für $P \in g(Z, E)$, also $\tau_{ZP} \in \mathbf{T}_{g(Z, E)}$) bisher folgende eineindeutigen (durch durchgehende Doppelpfeile gekennzeichneten) Beziehungen erhalten:

$$\begin{array}{ccc}
 (\sigma_{EP}(E) =) & P & \xrightarrow{3.9 (15b)} \tau_{ZP} (= \iota_{\sigma_{EP}}(\tau_{ZE})) \\
 & \uparrow & \nearrow \\
 & & \tau_{ZE} \\
 & \downarrow 4.9 (13) & \downarrow 4.9 (18) \\
 & \sigma_{EP} & \xrightarrow{\quad} \iota_{\sigma_{EP}}
 \end{array}$$

Dadurch erhält man die gestrichelte 1-1-Beziehung zwischen S_Z und $\mathbf{T}_{g(Z,E)} \setminus \{\text{id}\}$. Mit ihr kann man auf $\mathbf{T}_{g(Z,E)} \setminus \{\text{id}\}$ eine multiplikative Struktur einführen. Identifiziert man die Punktepaare (Z, P) für $P \in g(Z, E)$ mit den „Ortsvektoren“ $\tau_{ZP} \in \mathbf{T}_{g(Z,E)}$, so erhält man die Multiplikation der Hilbertschen Streckenrechnung. Die Addition entspricht der in $\mathbf{T}_{g(Z,E)}$.

- (5) Mit den in (3) und (4) verwendeten Bezeichnungen bzw. Zusammenhängen kann man das Rechnen im Koordinatenkörper K auf der Zahlengeraden $g(Z, E)$ (bei Verwendung des Koordinatensystems (Z, τ_{ZE}) auf dieser Geraden geometrisch veranschaulichen:

(a) Dem Produkt $\iota_{\sigma_{EP_1}} \iota_{\sigma_{EP_2}} = \iota_{(\sigma_{EP_1})(\sigma_{EP_2})} =: \iota_{\sigma_{EP_3}}$ entspricht der Punkt P_3 mit $P_3 = \sigma_{EP_1} \sigma_{EP_2}(E)$ oder anders ausgedrückt der Ortsvektor $\iota_{\sigma_{EP_1}} \iota_{\sigma_{EP_2}}(\tau_{ZE}) = \iota_{\sigma_{EP_1}}(\tau_{ZP_2}) = \tau_{Z(\sigma_{EP_1}(P_2))} = \tau_{Z(\sigma_{EP_1} \sigma_{EP_2})(E)} =: \tau_{ZP_3}$. P_3 kann also auch als $P_3 = \sigma_{EP_1}(P_2)$ geschrieben werden.

(b) Der Summe $\iota_{\sigma_{EP_1}} + \iota_{\sigma_{EP_2}}$ entspricht der Ortsvektor τ_{ZP_4} (und damit der Punkt P_4), den man erhält durch

$$\begin{aligned}
 (\iota_{\sigma_{EP_1}} + \iota_{\sigma_{EP_2}})(\tau_{ZE}) &= (\iota_{\sigma_{EP_1}}(\tau_{ZE}))(\iota_{\sigma_{EP_2}}(\tau_{ZE})) \\
 &= \tau_{Z(\sigma_{EP_1}(E))} \tau_{Z(\sigma_{EP_2}(E))} = \tau_{ZP_1} \tau_{ZP_2} =: \tau_{ZP_4}
 \end{aligned}$$

Additiv rechnet man also mit den Elementen $\iota_{\sigma_{EP}} \in K$ bzgl. des Koordinatensystems (Z, τ_{ZE}) auf $g(Z, E)$ zugeordneten Ortsvektoren $\iota_{\sigma_{EP}}(\tau_{ZE}) = \tau_{ZP}$ in $\mathbf{T}_{g(Z,E)}$ (vgl. 4.9 (18)), also mit den entsprechenden Translationen.

- (6) Im Grunde genommen verwendet man solche geometrischen Interpretationen wie in (5) schon, wenn man im Unterricht die natürlichen Zahlen \mathbf{N} unter dem Zählzahlaspekt (d.h. mit dem Peanoschen Axiomensystem als mathematischen Hintergrund) bespricht. Auf dem „Zahlenstrahl“ deutet man die

Addition mit einer festen Zahl als Schiebung. Die Linksmultiplikation λ_y mit einer festen Zahl y definiert oder deutet man so: Man streckt 1 auf $\lambda_y(1) := y$ (eigentlich die Strecke $(0, 1)$ auf $(0, y)$) und $n = \underbrace{1 + \dots + 1}_n$ (im Grunde rekursiv) auf $\lambda_y(n) := \underbrace{y + \dots + y}_n =: yn$ (indem man jede der Einheitsstrecken, aus denen sich n additiv zusammensetzt, auf y streckt). Die so festgelegte Linksmultiplikation λ_y ist ein Endomorphismus der abelschen Halbgruppe $(\mathbf{N}, +)$. Verfolgt man das genauer, so ist die Multiplikation in \mathbf{N} mit Hilfe der Hintereinanderausführung in $\text{End}(\mathbf{N}, +)$ in völliger Analogie zu der im Ring K der spurtreuen Endomorphismen von \mathbf{T} zu definieren.

6 Bezüge zu Vorgehensweisen im Unterricht

In verschiedenen Schulbüchern wird folgender Weg (mit gewissen Varianten) zur Einführung in die Vektorrechnung (unter geometrischen Gesichtspunkten) vorgeschlagen: Mit Hilfe eines vorgegebenen Koordinatensystems werden Vektoren in der Ebene als Zahlenpaare eingeführt, die Schiebungen repräsentieren (entsprechend als Tripel für die räumliche Geometrie). Die Skalarmultiplikation wird mit Hilfe des Strahlensatzes motiviert und entsprechend definiert. Diese Vorgehensweise soll hier etwas eingehender verfolgt und mit unseren Ausführungen über die Zuordnung eines Vektorraums zu einer (D)-Ebene in Beziehung gesetzt werden.

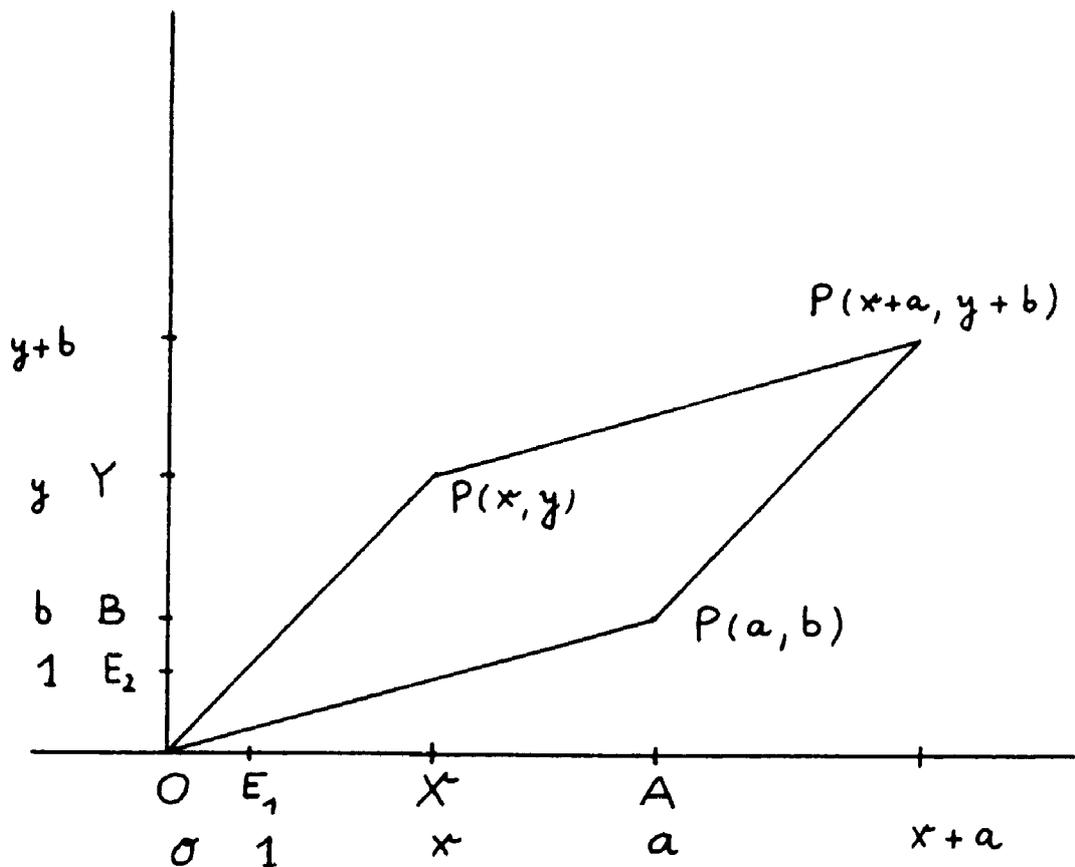
Kurz zusammengefaßt geht man so vor:

In der euklidischen Ebene sei ein Koordinatensystem (O, E_1, E_2) mit dem Anfangspunkt O und den Einheitspunkten E_1 und E_2 auf den beiden Koordinatenachsen vorgegeben (Figur 23), wobei man in den Schulbüchern meist ein kartesisches Koordinatensystem (also mit orthogonalen Achsen) wählt. Das Koordinatensystem legt nach seiner Definition ein paralleles Gitternetz fest, durch das die Punkte eindeutig durch Zahlenpaare (x, y) gekennzeichnet sind. Ein Punkt mit den reellen Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei im folgenden mit $P(x, y)$ bezeichnet.

Als Schiebung, definiert durch ein Zahlenpaar $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, werde folgende Abbildung bezeichnet:

$$P(x, y) \longmapsto P(x + a, y + b),$$

d.h. jeder Punkt wird um a in Richtung der ersten und um b in Richtung der zweiten Achse verschoben. Die Zahlenpaare (a, b) mit der eben definierten Wirkung auf die Punkte heißen dann Vektoren. Grob anschaulich formuliert: An jedem Punkt $P(x, y)$ wird die Strecke $(O, P(a, b))$ „angehängt“ (vgl. Figur 23).



Figur 23

Nun kann man sich sofort davon überzeugen, daß die oben definierte Schiebung eine Parallelverschiebung im Sinne des Kapitels 3 ist. Das Quadrupel $(P(0,0), P(a,b), P(x,y), P(x+a, y+b))$ ist nämlich ein Parallelogramm, weil die Mittelpunkte der Diagonalen übereinstimmen (jeweils $P(\frac{1}{2}(x+a), \frac{1}{2}(y+b))$). Man kann das auch dadurch begründen, daß das Dreieck $P(0,0), P(a,0), P(a,b)$ kongruent zum Dreieck $P(x,y), P(x+a,y), P(x+a, y+b)$ ist.

Der Vektor (a,b) ist also eine Darstellung bezüglich des gegebenen Koordinatensystems für die Parallelverschiebung (im Sinne von Kapitel 3) mit der Darstellung $\tau_{P(0,0)P(a,b)}$ bezüglich $P(0,0)$.

Aus dieser Einsicht folgt insbesondere, daß man im Prinzip die Unabhängigkeit der Einführung von Schiebungen vom vorgegebenen Koordinatensystem sehen kann, da bezüglich anderer Koordinatensysteme qualitativ eine analoge Darstellung der Schiebungen durch Zahlenpaare möglich ist. Die Unabhängigkeit braucht man,

wenn man mit Hilfe der Vektoren geometrische Sätze herleiten will. Diese müssen ja unabhängig vom Koordinatensystem sein.

Daß man beim geschilderten Vorgehen so viel „einfacher“ Schiebungen einführen und dann behandeln kann als bei unserem, liegt daran, daß durch die Vorgabe eines Koordinatensystems viele Eigenschaften von Parallelogrammen (und damit von Parallelgleichheit) inhärent durch das Koordinatensystem vorhanden sind und daß man mit Hilfe der Koordinaten in \mathbf{R} rechnen kann.

Man beachte, daß man jetzt schon durch die „Vektoren“ die gegenseitige Lage zweier Punkte $P(x_1, y_1)$ und $P(x_2, y_2)$ durch das Zahlenpaar $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ kennzeichnen kann, das die Schiebung darstellt, die $P(x_1, y_1)$ in $P(x_2, y_2)$ abbildet.

Ist bei unseren Untersuchungen der Vektorraum ${}_K\mathbf{T}$ der Translationen über dem Schiefkörper K erreicht, so erhalten wir entsprechend für jede Translation eine Darstellung durch Paare $(\alpha, \beta) \in K \times K$ bezüglich eines Koordinatensystems $(O, \tau_{OE_1}, \tau_{OE_2})$: Stellt man in eindeutiger Weise jede Translation bezüglich O und der Basis $(\tau_{OE_1}, \tau_{OE_2})$ von ${}_K\mathbf{T}$ als $\tau = \tau_{OP} = (\alpha\tau_{OE_1})(\beta\tau_{OE_2})$ dar, so entspricht $(\alpha, \beta) \in K \times K$ eineindeutig τ .

Das schulische Vorgehen entspricht in gewisser Weise unter Berücksichtigung der jeweils anderen Ausgangslage unseren Überlegungen, wenn man folgendes beachtet: Wir führen die Elemente der abelschen Gruppe des späteren Vektorraums als Abbildungen (Parallelverschiebungen) ein und behalten dies auch später so bei. Beim angesprochenen schulischen Vorgehen dienen Schiebungen als Motivation zur Einführung von Zahlenpaaren, die die Elemente des Vektorraums werden. Mit diesen wird dann weitergearbeitet.

Die *Skalarmultiplikation* mit Elementen $r \in \mathbf{R}$ wird bei der obigen Definition der Vektoren als Zahlenpaare (a, b) , die Schiebungen darstellen, durch

$$r(a, b) := (ra, rb)$$

definiert. Dies wird mit Hilfe des Strahlensatzes motiviert. Um dies und die Beziehungen zu unserem Vorgehen erläutern zu können, werden wir zuerst an einige Sachverhalte aus der Schulgeometrie erinnern.

Da wir den Strahlensatz mit Hilfe des Teilverhältnisses formulieren wollen, stellen wir einige Bemerkungen zu diesem voran. U.a. hat man zwei alternative Möglichkeiten:

- (1) Man geht von einem Koordinatensystem auf einer Geraden $g(O, E)$ mit O als Nullpunkt und E als Einheitspunkt und dessen Eigenschaften aus, die vor allem Beziehungen zum Abstandsbegriff und der Anordnung (der Punkte auf der Geraden) betreffen. Mit $k(A) \in \mathbb{R}$ sei die Koordinate eines Punktes A bezeichnet. Dann wird man z.B. verlangen, daß gilt

$$|k(S) - k(R)| = d(R, S).$$

($d(R, S)$ sei der Abstand von R und S .)

Das Teilverhältnis $TV(O; A, B)$ von Punkten $A \neq O$ und B auf $g(O, E)$ kann man dann als

$$TV(O; A, B) := k(B)k(A)^{-1}$$

definieren. D.h. $TV(O; A, B)$ ist die reelle Zahl, so daß gilt:

$$(*) \quad k(B) = TV(O; A, B)k(A).$$

Es gilt $|TV(O; A, B)| = d(O, B) \cdot (d(O, A))^{-1}$. Anschaulich ist die Koordinate $k(A)$ also ein Maß für die Strecke (O, A) bezüglich (O, E) als Einheitsstrecke (unter Berücksichtigung der Lage von A , die das Vorzeichen von $k(A)$ bestimmt).

Die Beziehung $(*)$ besagt, daß das Teilverhältnis $TV(O; A, C)$ ein Maß für die Strecke (O, C) bezüglich des Maßes von (O, A) (unter Berücksichtigung der gegenseitigen Lage) ist. D.h., durch $TV(O; A, C)$ wird (O, C) durch (O, A) „gemessen“.

- (2) Eine andere Möglichkeit ist die, zuerst den Begriff des Teilverhältnisses $TV(O; A, B)$ für Punkte $O, A \neq O, B$ einer Geraden (z.B. in Zusammenhang mit der Besprechung des Strahlensatzes) zu entwickeln, nämlich unter dem oben schon erwähnten Gesichtspunkt, die Strecke (O, B) mit Hilfe von (O, A) zu „messen“. Als eine Eigenschaft des Teilverhältnisses für Punkte $O, E \neq O, A \neq O, C$ auf $g(O, E)$ ergibt sich:

$$(**) \quad TV(O; E, C) = TV(O; A, C) TV(O; E, A).$$

Anschaulich bedeutet das wieder: Das „Maß“ von (O, C) bezüglich (O, E) ergibt sich aus dem Produkt des „Maßes“ von (O, C) bzgl. (O, A) und des „Maßes“ von (O, A) bezüglich

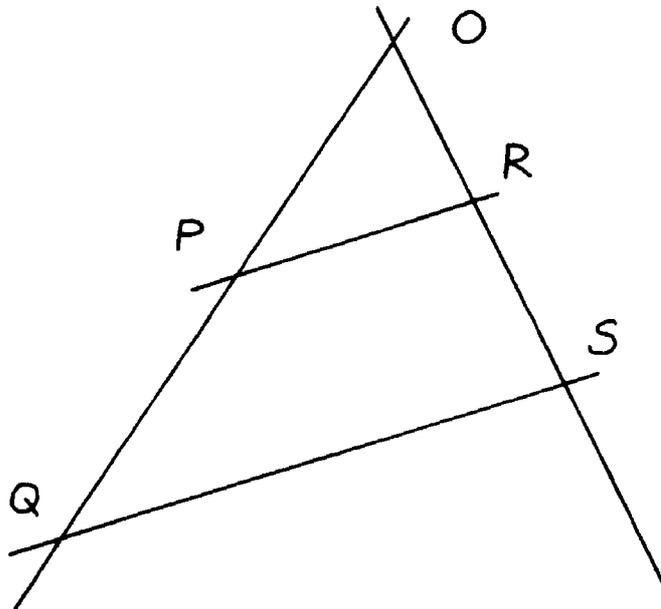
(O, E) . Koordinaten $k(P)$ auf $g(O, E)$ mit O als Null- und E als Einheitspunkt kann man dann so einführen:

$$k(P) := \text{TV}(O; E, P).$$

Dann erhält man aus (**) wieder die Beziehung (*) von oben.

In beiden Fällen kann man den *Strahlensatz* dann so formulieren:
Für Punktepaare (P, Q) und (R, S) , mit den Eigenschaften
 $O, P \neq O, Q$ und $O, R \neq O, S$ sind jeweils kollinear, gilt

$$g(P, R) \parallel g(Q, S) \longleftrightarrow \text{TV}(O; P, Q) = \text{TV}(O; R, S).$$



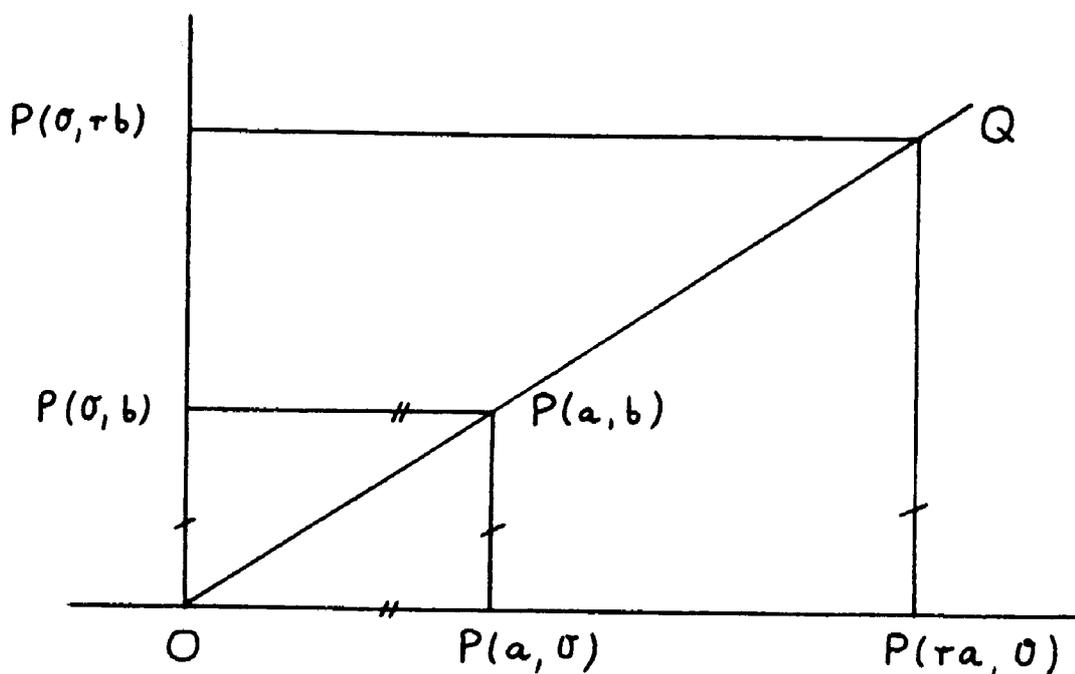
Figur 24

Streckungen mit O als Zentrum und $0 \neq r \in \mathbb{R}$ als Streckfaktor kann man als Abbildungen σ_r folgendermaßen definieren:

Für jeden Punkt $X \neq O$ sei $\sigma_r(X)$ der eindeutig bestimmte Punkt Y auf $g(O, X)$, für den gilt: $\text{TV}(O; X, Y) = r$ und weiter $\sigma_r(O) := O$. Mit Koordinaten (und obigen Bemerkungen) ausgedrückt heißt das (vgl. (*) und (**)):

$$k(\sigma_r(X)) = rk(X).$$

Nach diesen Vorbetrachtungen kommen wir zur (geometrischen) Motivierung des Skalarproduktes (vgl. Figur 25).



Figur 25

(a, b) sei der Vektor, der die entsprechende Schiebung darstellt, die also durch das Punktepaar $(O, P(a, b))$ charakterisiert ist. $0 \neq r$ sei eine reelle Zahl (für obige Figur $r > 0$ gewählt). Nach (*) gilt

$$\begin{aligned} ra &= k(P(ra, 0)) = \text{TV}(O; P(a, 0), P(ra, 0)) \cdot k(P(a, 0)) \\ &= \text{TV}(O; P(a, 0), P(ra, 0)) \cdot a, \end{aligned}$$

also

$$\text{TV}(O; P(a, 0), P(ra, 0)) = r.$$

Q sei der Punkt auf $g(O, P(a, b))$ mit der ersten Koordinate ra , so daß $g(P(ra, 0), Q)$ parallel zu $g(P(a, 0), P(a, b))$ ist. Dann ist nach dem Strahlensatz

$$\text{TV}(O; P(a, b), Q) = r.$$

Aus (*) folgt entsprechend wie oben (die Koordinaten auf der zweiten Achse seien auch mit k bezeichnet) $rb = k(P(0, br)) = \text{TV}(O; P(0, b), P(0, br))k(P(0, b)) = \text{TV}(O; P(0, b), P(0, br)) \cdot b$, also $\text{TV}(O; P(0, b), P(0, br)) = r = \text{TV}(O; P(a, b), Q)$.

Aus dem Strahlensatz (Richtung von rechts nach links) folgt daher:

$$g(P(0, br), Q) \parallel g(P(0, b), P(a, b)).$$

Daher hat Q die Koordinaten (ra, rb) . Die Strecke (O, Q) charakterisiert also die Schiebung (ra, rb) , die daher als $r(a, b)$ definiert wird. Man könnte auch den anderen Strahlensatz anwenden, der Aussagen über das Verhältnis der Strecken auf den Parallelen in Bezug auf das Verhältnis der Achsenabschnitte macht.

Nach Definition ist Q der Bildpunkt $\sigma_r(P(a, b))$ von $P(a, b)$ bei der Streckung σ_r .

In unserer Schreibweise heißt das obige Ergebnis daher:

$$\tau_{OP(ra, rb)} = \tau_{O\sigma_r(P(a, b))} = \iota_{\sigma_r}(\tau_{OP(a, b)}) \quad (4.9 (17)).$$

Das geschilderte Vorgehen in der Schule entspricht daher bei der Einführung des Skalarprodukts unserer Definition der Wirkung von K auf \mathbf{T} . Der Unterschied liegt natürlich darin, daß man von verschiedenen Grundlagen ausgeht. Wir hatten als Grundlage die geometrischen Gegebenheiten einer (D)-Ebene und haben daraus erst einen (Schief-) Körper K hergeleitet, so daß auf der (geometrisch entwickelten) abelschen Gruppe der Translationen \mathbf{T} eine Vektorraumstruktur über K definiert werden konnte. Im Unterricht zeigt man, daß die Schiebungen (mit Hilfe von $(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definiert) eine abelsche Gruppe sind, und kann bei gegebenem \mathbf{R} die Skalarmultiplikation (zwar geometrisch motiviert) dann „algebraisch“ definieren. Verfolgt man das genauer, so erhält man hier \mathbf{R} als den Körper der spurtreuen Endomorphismen der abelschen Gruppe $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}, +)$ zurück.

Als Bemerkung sei angefügt, daß man bei unseren Erörterungen das Teilverhältnis (mit obigen Bezeichnungen) so einführen kann: $TV(O; A, B)$ ist das Element aus K , für das gilt:

$$\tau_{OB} = TV(O; A, B)\tau_{OA}.$$

Dann gilt der Strahlensatz in der obigen Form.

7 Anhang

7.1 Großer Satz (P) von Pappus-Pascal (affin)

Gegeben sei ein Sechseck, dessen Eckpunkte $11'22'33'$ abwechselnd auf zwei Geraden g und h liegen, jedoch kein Eckpunkt auf beiden gleichzeitig, mit folgender Eigenschaft:

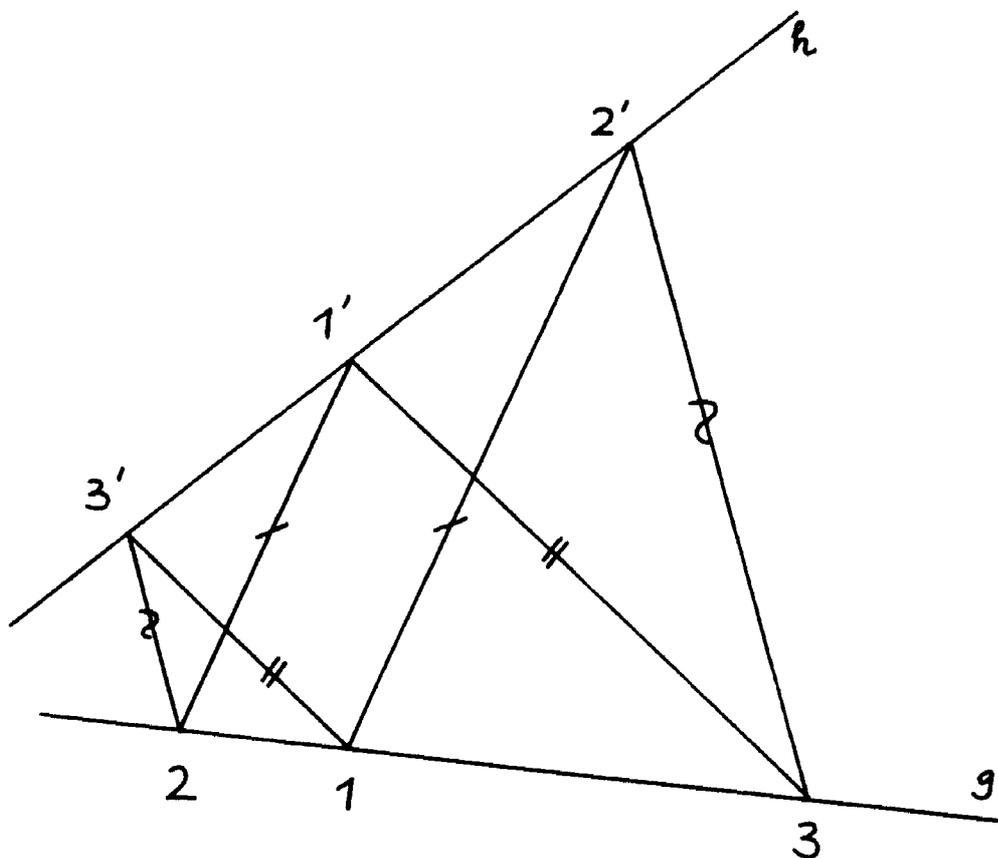
Zwei Paare von Gegenseiten sind parallel.

Dann ist auch das dritte Paar von Gegenseiten parallel.

Anders geschrieben:

Voraussetzung: $1, 2, 3 \in g, 1', 2', 3' \in h$; mit $g(1, 2') \parallel g(1', 2)$ und $g(1, 3') \parallel g(1', 3)$.

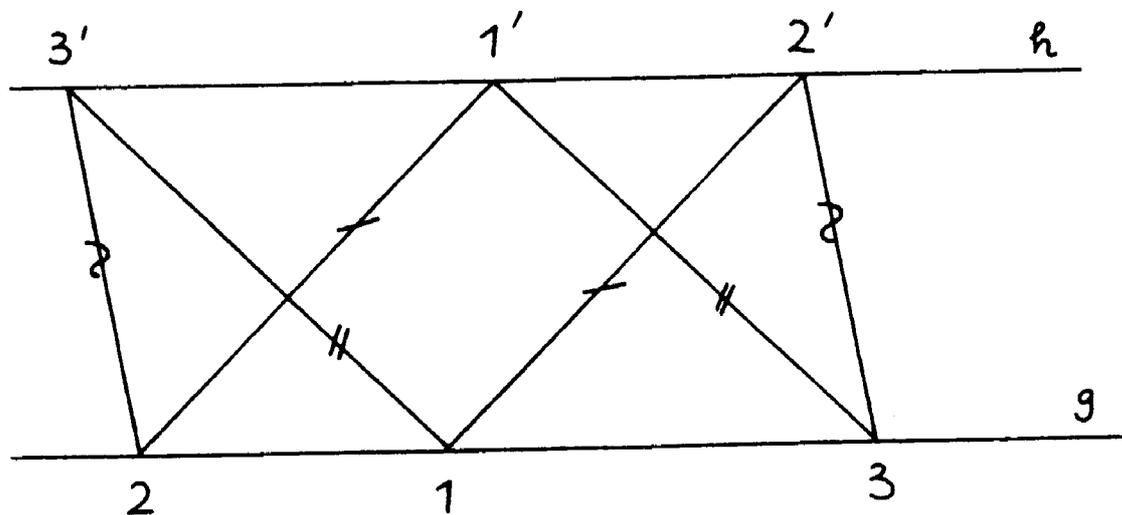
Dann gilt: $g(2, 3') \parallel g(2', 3)$.



Figur 26

7.2 Kleiner Satz (p) von Pappus-Pascal

Die Voraussetzungen sind analog zu denen von (P) mit dem Unterschied, daß die Trägergeraden g und h jetzt parallel sind. Die Folgerung ist dieselbe.



Figur 27

Bemerkung. Aus (P) folgt (D), und aus (d) folgt (p). Zusammen mit 2.4 gilt also: Aus (P) folgt (D), (d) und (p).

Damit ist $(Z, \sigma R, X, \sigma Q) = (Z, \sigma R, X, \sigma \tau_{ZR} \sigma^{-1} X)$ ein Parallelogramm, woraus folgt

$$\tau_{Z\sigma R} X = \sigma \tau_{ZR} \sigma^{-1} X.$$

Das kann man auch für andere Lagen von X zeigen, so daß folgt: $\sigma \tau_{ZR} \sigma^{-1}$ ist eine Parallelverschiebung, die mit $\tau_{Z\sigma R}$ übereinstimmt.

Literatur

- [1] ARTIN, E., *Geometric Algebra*, New York, London 1957.
- [2] *Grundkurs Mathematik III.1 Elementargeometrie 1. Teil*, Deutsches Institut für Fernstudium an der Universität Tübingen, Tübingen 1974 (und Nachdrucke).
- [3] HILBERT, D., *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart, 12. Aufl. 1977.
- [4] LINGENBERG, *Grundlagen der Geometrie*, Mannheim-Wien-Zürich, 3. Aufl. 1978.
- [5] OSTERMANN, F., SCHMIDT, J., *Begründung der Vektorrechnung aus Parallelogrammeigenschaften*, Math.-Phys. Semesterberichte NF X (1964), 47–64.
- [6] SCHWAN, W., *Streckenrechnung und Gruppentheorie*, Math. Zeitschrift 3 (1919), 11–28.